ORSAY
n° d'ordre : 2465

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le titre de DOCTEUR 3e cycle

PAR

Monsieur DARVES BORNOZ Jean-Michel

SUJET : Résolution numérique du problème du transport miscible en nappe captive par une méthode d'éléments finis mixtes.

soutenue le 15 juin 1978 devant la Commission d'examen

MM. TEMAM Président

JOURON

LABYE

WOLSACK

à Roger Darves- Bornoz et Jean Parceval

Je tiens à remercier d'abord monsieur Temam qui m'a fait connaitre l'analyse numérique et qui m'a permis d'entreprendre ce travail. Il me fait aujourd'hui l'honneur de présider le jury. Je lui en suis reconnaissant.

Toute ma gratitude va également à messieurs Jouron et Labye d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont aussi à monsieur Wolsack ,qui est membre de ce jury et à monsieur Chastan pour leurs conseils et leur collaboration.

Je remercie enfin messieurs Mériaux et Guyon qui m'ont accueilli au C.T.G.R.E.F. et qui m'ont donné tous les moyens de mener à bien ce travail.

O. - INTRODUCTION. I

I. - PRESENTATION DU PROBLEME. 3

II. - LE PROBLEME DE L'ECOULEMENT DU MELANGE. 6

1 - Notations et résultats préliminaires.

2 - La formulation variationnelle.

3 - Approximation des espaces. Une condition de compatibilité.

4 - Problème approché.

5 - Stabilité de la méthode.

6 - Résolution numérique du problème approché.

7 - Résultats numériques.

III. - LE PROBLEME DU TRANSPORT DE LA SUBSTANCE. 44

1 - Position du problème.

2 - Le problème approché.

3 - Résultats numériques.

- ANNEXES ET BIBLIOGRAPHIE. 72

- Annexe (1) - Calcul de coefficients.

- Annexe (2) - Une condition de compatibilité des éléments.

- Bibliographie.

INTRODUCTION

La question de la pollution accidentelle des nappes d'eaux souterraines, que ce soit par des polluants immiscibles à l'eau (pétrole...) ou par des substances miscibles à l'eau (sels...), est une des questions qui sont au centre des études actuelles des hydrogéologues. L'analyse numérique se révèle comme un outil tout-à-fait nécessaire dans la modélisation et la simulation de tels phénomènes pour les physiciens et les ingénieurs qui se consacrent à ces questions.

Ce travail constitue le bilan d'une étude menée au C.T.C.R.E.F. (Ministère de l'Agriculture) dont l'objet était de simuler la propagation d'un polluant miscible à l'eau dans une nappe captive.

Au moment d'entreprendre ce travail, il nous a fallu avoir en tête un certain nombre de données, certaines physiques, comme le désir d'obtenir des résultats fiables à la fois sur des variables et sur des flux, d'autres non, comme la volonté de mettre en oeuvre une méthode simple dans son utilisation ultérieure et ne nécessitant pas une infrastructure trop lourde.

La modélisation du phénomène conduit à la résolution d'un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre ; la première, stationnaire est du type Laplacien ; la seconde, d'évolution, est constituée d'un opérateur du type Laplacien et d'un terme de transport du premier ordre, pour ce qui concerne les dérivées partielles spatiales. Les considérations qui précèdent nous ont amenés à séparer les variables (fractions de masse, piézomètres) des flux considérés (flux dispersifs, flux de mélange), ce qui conduit à écrire chacune des équations sous la forme d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. Pour la résolution numérique on adopte, alors, une méthode d'éléments finis mixtes particulièrement simple de maniement.

Dans le chapitre I, on trouvera une présentation des équations et des variables.

Dans le chapitre II, on étudiera l'existence et l'unicité de solutions au premier système comme unique point-selle d'une fonctionnelle puis les

conditions de régularité et de stabilité du problème approché.

Dans le chapitre III, on verra que le deuxième système est un système de Friedrichs, qui est bien posé sous certaines hypothèses sur les termes d'échanges et les conditions aux limites. Après avoir exposé la méthode d'éléments finis adoptée pour la résolution de ce deuxième système, on étudiera la stabilité des solutions du problème approché.

A la fin des chapitres II et III, sont présentés les résultats numériques obtenus pour les solutions particulières sur lesquelles les programmes ont été testés.

I. Présentation du problème

Nous étudions ici le problème de la propagation d'une substance miscible à l'eau dans une nappe captive.
Les hypothèses physiques adoptées sont les suivantes:

-hypothèse de Dupuit: elle entraîne que l'écoulement du mélange est quasi horizontal.

-hypothèse du traceur idéal: l'écoulement du mélange est indépendant de la répartition des fractions de masse dans la nappe. Le problème de l'écoulement est alors soluble seul.

-on supposera de plus que l'écoulement est stationnaire.

S'inspirant de [9], [10] et [11] on peut formuler comme dans [12] le problème:

problème de l'écoulement du mélange
$\operatorname{div} \vec{Q} = i_e + i_v - i_s \quad \forall x \in \Omega$ (bilan de masse) $\vec{Q} = -T \overrightarrow{\operatorname{grad}} h \quad \forall x \in \Omega$ (loi de Darcy)
problème de la propagation de la substance
$b\phi \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{Q} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \omega + \operatorname{div} \vec{J} = i_e(\omega_e - \omega) + i_v(\omega_v - \omega)$ $, \forall x \in \Omega, \forall t \in (0,T)$ (bilan de masse) $\vec{J} = -b\phi \, \overline{\overline{D}}(\vec{Q}) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \omega, \forall x \in \Omega$ (loi de dispersion) $\forall t \in (0,T)$

conditions aux limites et initiale	
$h = h_s$	$\omega = \omega_s \quad \forall x \in \Gamma_1$ (condition de Dirichlet)
$\vec{Q}.\vec{n} = q_s$	$\vec{J}.\vec{n} = J_s \quad , \forall x \in \Gamma_2$ avec $J_s = 0$ si $q_s > 0$; $J_s = q_s(\omega_s - \omega)$ si $q_s < 0$
$\vec{Q}.\vec{n} = a_s(h - h_s)$	$\vec{J}.\vec{n} = \lambda_s(\omega - \omega_s)\vec{Q}.\vec{n} \quad , \forall x \in \Gamma_3$ (condition Neumann -Fourier)
	$\omega(0) = \omega_0 \quad \forall x \in \Omega$ (condition initiale)

NOTATIONS

Ω domaine de $\mathbb{R}^2$ de variation de $x = (x_1, x_2)$

Γ frontière du domaine. On a $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$

$\vec{n} = (n_1, n_2)$ normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur

$(0,T)$ intervalle de variation de la variable temps t

variables	
h	piézométrie
ω	fraction de masse
$\vec{Q}$	débit spécifique du mélange (intégrale sur une verticale)
J	flux dispersif (intégrale sur une verticale)

coefficients et données
$b > 0$ puissance de la nappe
$\overline{\overline{D}}(Q)$ tenseur de dispersion symétrique défini positif
avec $D_{ij} = (\varepsilon + D_T)\,\delta_{ij} + (D_L - D_T)\,\dfrac{Q_i Q_j}{\lvert \vec{Q} \rvert^2}$, $\forall i,j = 1,2$ $D_L = \dfrac{A_L \lvert \vec{Q} \rvert}{b\phi}$, $D_T = \dfrac{A_L \lvert \vec{Q} \rvert}{b\phi}$
$A_L, A_T > 0$ coefficients de dispersion longitudinale et transversale
$\phi > 0$ porosité du milieu
$T > 0$ transmissivité de la nappe
$a_s > 0$ $a_s = \dfrac{T_s}{l_s}$, $T_s > 0$ transmissivité de la limite semi-perméable $l_s > 0$ épaisseur de cette limite
$i_e \geq 0$ débit d'injection
ω_e fraction de masse du mélange injecté
$i_s \geq 0$ débit de pompage
$i_v \geq 0$ infiltration verticale
ω_v fraction de masse du mélange filtrant
h_s, ω_s piézométrie et fraction de masse extérieures
q_s débit sortant sur Γ_2

II.- ETUDE DE L'EQUATION DE L'ECOULEMENT DU MELANGE.

1.- Notations et résultats préliminaires.

Dans toute la suite, à moins d'indications contraires, Ω désignera un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ et de classe $\mathcal{C}^2$.

* L'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions de carré sommable sur Ω muni du produit scalaire $(u, v) = \int_\Omega uv\,dx$ est un Hilbert dont la norme associée est notée $|u| = (\int_\Omega |u|^2 dx)^{1/2}$.

* On notera $\mathbb{L}^2(\Omega)$ les fonctions à valeurs vectorielles (dans $\mathbb{R}^2$) dont chacune des composantes appartient à $L^2(\Omega)$. Cet espace muni du produit scalaire $(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{i=1}^{2} (q_i . p_i)$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, est Hilbert dont on notera la norme associée

$$|\vec{q}| = (\int_\Omega |\vec{q}|^2 dx)^{1/2} = (\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |q_i|^2 dx)^{1/2}.$$

* $L^2(\Gamma)$ désignera les fonctions de carré sommable sur Γ pour la mesure superficielle $d\sigma$.

* On désigne par ∂^α, $\alpha \in \mathbb{N}$, une, quelconque, des dérivations partielles au sens des distributions d'ordre α ; par exemple ∂^α désigne :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{si } \alpha = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_2^2}, \frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{si } \alpha = 2$$

Soit m un entier positif. On utilisera les espaces de Sobolev $H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) ; \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \leq m \}$ avec leur norme $\|u\|_m = (\sum_{\alpha \leq m} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^2 dx)^{1/2}$ et leur semi-norme $|u|_m = (\sum_{\alpha = m} \int_\Omega |\partial^\alpha v|^2 dx)^{1/2}$

On notera simplement par

$$((u, v)) = \int_\Omega uv\,dx + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

et $$\|u\| = (\int_\Omega u^2 dx + \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx)^{1/2}$$

le produit scalaire et la norme de $H^1(\Omega)$.

* On notera $\mathbb{H}^m(\Omega)$ l'espace $(H^m(\Omega))^2$ muni des normes et semi-normes $\|\vec{q}\|_m$ et $|\vec{q}|_m$ provenant de celles de $H^m(\Omega)$.

* On définit l'espace

$$H(\text{div};\Omega) = \{ \vec{q} \in \mathbb{L}^2(\Omega) ; \text{div}\,\vec{q} \in L^2(\Omega) \}$$

où $\text{div}\,\vec{q} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$

et sa norme $\|\vec{q}\|_{H(\text{div};\Omega)} = (|\vec{q}|^2 + |\text{div}\,\vec{q}|^2)^{1/2}$.

* Théorèmes de traces.

Théorème 1.1 (Lions - Magenes [1])

(Ω désigne un domaine possédant les propriétés de régularité suivantes : Γ est une variété de classe $\mathcal{C}^m$. est situé localement d'un seul côté de Γ.
Il existe des opérateurs (dits de traces) linéaires continus $\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}$ de $H^m(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, tels que pour toute fonction u, m fois continument différentiable dans $\bar{\Omega}$, on ait :

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma = \text{la restriction de } u \text{ à } \Gamma$$

$$\gamma_s u = \frac{\partial^s u}{\partial \nu^s}\Big|_\Gamma \quad (s = 1, \dots, m-1)$$

où ν est le secteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω.
L'espace $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ est le noyau de $\gamma_0 \times \dots \times \gamma_{m-1}$.
Les espaces images $\gamma_j H^m(\Omega)$ sont des sous-espaces $\subsetneq L^2(\Gamma)$
En particulier $\gamma_0 H^1(\Omega)$ est noté $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ peut être muni de la norme transportée par γ_0.
De plus, il existe un opérateur ℓ_Ω (dit de relèvement) linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0 \circ \ell_\Omega$ = identité dans $H^{1/2}(\Gamma)$.
De la même façon il existe un opérateur ℓ_Ω de relèvement linéaire continu de $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^2(\Omega)$ tel que $(\gamma_0 \times \gamma_1) \circ \ell_\Omega$ = identité dans $H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

Théorème 1.2. (Temam - [2])

(Il existe un opérateur linéaire continu γ_ν de $H(\mathrm{div};\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)^*$ tel que pour toute fonction $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) = (\mathcal{D}(\bar{\Omega}))^2$
$(\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\bar{\Omega}\})$, on ait :

$$\gamma_\nu u = \text{la restriction de } \vec{u}.\vec{\nu} \text{ à } \Gamma.$$

De plus il existe un relèvement ℓ_Ω linéaire continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H(\mathrm{div};\Omega)$ i.e. tel que $\gamma_\nu \circ \ell_\Omega$ = identité dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

Si $\vec{q} \in (\mathrm{div};\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on démontre qu'on a la formule de Green généralisée :

$$\int_\Omega v \,\mathrm{div}\,\vec{q}\, dx + \int_\Omega \vec{q}\cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, v\, dx = \langle \gamma_\nu q, \gamma_0 v \rangle$$

(*) on note $H^{-1/2}(\Gamma)$ l'espace dual de $H^{1/2}(\Gamma)$. On a vu que $H^{1/2}(\Gamma) \underset{i}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma)$ (avec i injection continue); on a donc $L^2(\Gamma)$ (qui est identifié à son dual) $\underset{i'}{\hookrightarrow} H^{-1/2}(\Gamma)$ (avec i' injection continue).

où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre les espaces $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$.

On notera par la suite $\langle \gamma_\nu \vec{q}, \gamma_0 v \rangle = \int_\Gamma v \, \vec{q} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$

On va énoncer maintenant quelques théorèmes classiques concernant l'existence, l'unicité et la caractérisation d'un minimum ou d'un point-selle d'une fonctionnelle :

Proposition 1.3. [3]

(Soit V un Hilbert et soit J une fonctionnelle définie dans V à
(valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose J convexe et Gateaux - différentiable.
(ALORS J est faiblement et fortement SCI (semi-continue inférieurement), c'est à dire si $v_n \longrightarrow v$ dans V faible (respectivement fort), alors $J(v) \leqslant \liminf_{n \to \infty} J(v_n)$.

Théorème 1.4. [3]

(Soit V un Hilbert de norme $\| \cdot \|_V$.
(Soit K un ensemble convexe, fermé, non vide de V.
(Soit J une fonctionnelle définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(On suppose J convexe (respectivement strictement convexe), SCI et vérifiant :

$$J(u) \longrightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad u \in K, \ \|u\|_V \longrightarrow +\infty$$

(ALORS :
(Il existe (respectivement un et un seul) $\bar{u} \in K$, vérifiant $J(\bar{u}) = \inf_{u \in K} J(u)$

Théorème 1.5. [3]

(Soit V un Hilbert et K un ensemble convexe de V et soit J une
(fonctionnelle définie sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, Gateaux différentiable.
(ALORS $\bar{u} \in K$ réalise le minimum de J sur K si et seulement si :

$$\langle J'(\bar{u}), v - \bar{u} \rangle \geqslant 0 \quad , \forall v \in K$$

(où $J'(\bar{u})$ désigne la Gateaux - différentielle de J en $\bar{u}$.

Théorème 1.6. [4]

(Soient U et V 2 Banach réflexifs.
(Soit $C \subset U$ (respectivement $D \subset V$) un convexe fermé non vide.
(La fonctionnelle $L : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$\forall u \in C$, $v \longrightarrow L(u, v)$ est concave (respectivement strictement concave), SCS

$\forall v \in D$, $u \longrightarrow L(u, v)$ est convexe (respectivement strictement convexe), SCI

L vérifie en outre :

$\exists\, v_0 \in D$ tel que :

$L(u, v_0) \longrightarrow +\infty$ quand $u \in C$, $\|u\|_U \longrightarrow +\infty$

$\exists\, u_0 \in C$ tel que :

$L(u_0, v) \longrightarrow -\infty$ quand $v \in D$, $\|v\|_V \longrightarrow +\infty$

ALORS :

L possède au moins un point-selle $(\bar{u}, \bar{v})$ sur $C \times D$ (respectivement un et un seul) et on a :

$$L(\bar{u}, v) \leqslant L(\bar{u}, \bar{v}) \leqslant L(u, \bar{v}), \ \forall u \in C, \forall v \in D$$

Théorème 1.7. [4]

Soient U et V 2 Banach réflexifs;

Soient $C \subset U$, $D \subset V$ des ensembles convexes :

La fonctionnelle $L : C \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$\forall u \in C$, $v \longrightarrow L(u, v)$ est concave, Gateaux - différentiable

$\forall v \in D$, $u \longrightarrow L(u, v)$ est convexe, Gateaux - différentiable

ALORS $(\bar{u}, \bar{v})$ $C \times D$ est point-selle de L si et seulement si :

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}), u - \bar{u} \right\rangle \geqslant 0, \quad \forall u \in C$$

et

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}), v - \bar{v} \right\rangle \leqslant 0, \quad \forall v \in D.$$

Proposition 1.8 (de RHAM [2])

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $f = \text{grad}\, p$, $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est que :

$$\langle f, v \rangle = 0, \quad \forall v \in \{\vec{v} \in \mathcal{D}(\Omega);\ \text{div}\, \vec{v} = 0\}$$

Proposition 1.9 (DENY - LIONS [2])

Ω est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$.

(i) si une distribution p a toutes ses dérivées premières dans $L^2(\Omega)$ alors $p \in L^2(\Omega)$ et

$$|p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c(\Omega)\, |\text{grad}\, p|_{L^2(\Omega)}$$

(ii) Si une distribution p a toutes ses dérivées premières dans $H^{-1}(\Omega)$ alors $p \in L^2(\Omega)$ et $|p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leqslant c(\Omega)\, \|\text{grad}\, p\|_{H^{-1}(\Omega)}$

* Le théorème de traces (1.2) permet de définir l'espace de Hilbert :

$H(\mathrm{div},\Omega;\gamma_\nu,\Gamma) = \{ \vec{q} \in \mathbb{L}^2(\Omega), \mathrm{div}\, q \in L^2(\Omega),\ \vec{q}.\vec{n} \in L^2(\Gamma) \}$

et son produit scalaire :

$$((q,p)) = (q,p)_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + (\mathrm{div}\, q, \mathrm{div}\, p)_{L^2(\Omega)} + (\vec{q}.\vec{n}, \vec{p}.\vec{n})_{L^2(\Gamma)}$$

* Les hypothèses sur les coefficients et les données du problème sont rassemblées ci-dessous :

(1.1) Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

(1.2) $T \in C^0(\bar{\Omega})$, $a_s \in L^\infty(\Gamma)$ vérifient :

$\alpha, \beta > 0$ tels que $0 \leqslant \beta < T \leqslant \alpha$ sur $\bar{\Omega}$

et $0 < \beta < a_s < \alpha$ sur p.p.

(1.3) $i \in L^2(\Omega)$

$q_s \in L^2(\Gamma)$, $q_s = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$

$h_s^3 \in L^2(\Gamma)$, $h_s^3 = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$h_s^1 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $h_s^1 = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$

On notera ces hypothèses les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$. Elles seront supposées implicitement partout par la suite.

* On utilisera le résultat de Lions-Magenes suivant :

<u>Théorème 1.10</u> [1]

(Soit ϕ $H^{-1/2}(\Gamma)$ et soit f $L^2(\Omega)$ vérifiant :

$$< \phi, 1 > = \int_\Omega f(x)\, dx$$

alors le problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta w = f \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = \phi \end{cases}$$

admet une solution unique à une constante près dans $H^1(\Omega)$.

2. La formulation variationnelle.

On rappelle qu'on veut trouver h et $\vec{Q}$ vérifiant (2.1)-(2.5) sous les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$:

(2.1) $\operatorname{div} \vec{Q} = i$ dans Ω

(2.2) $\frac{1}{T}\vec{Q} + \operatorname{grad} h = 0$ dans Ω

(2.3) $h = h_s^1$ sur Γ_1

(2.4) $\vec{Q}.\vec{n} = q_s$ sur Γ_2

(2.5) $\vec{Q}.\vec{n} : a_s\,(h - h_s^3)$ sur Γ_3

On considère la fonctionnelle $\mathcal{L}(q,H^c)$ définie sur $K = K_1 \times K_2$

avec $K_1 = \{\, \vec{q} \in H(\operatorname{div},\Omega;\gamma_\nu,\Gamma),\ \operatorname{div}\vec{q} = i \text{ dans } \Omega,\ \vec{q}.\vec{n} = q_s \text{ sur } \Gamma_2 \,\}$

$K_2 = \{\, h^c \in L^2(\Gamma)\ ;\ h^c = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \,\}$

par :

$$(2.6)\quad \mathcal{L}(q,H^c) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{T}\,|\vec{q}\,|^2 dx + \int_\Gamma H^c(\vec{q}.\vec{n} - a_s\,(\frac{H^c}{2} - h_s^3))d\sigma + \int_\Gamma h_s^1\,\vec{q}.\vec{n}\,d\sigma$$

On définit alors le problème variationnel :

(2.7) Trouver $(\vec{Q},h^c) \in K$ tel que $(\vec{Q},h^c)$ soit point-selle de $\mathcal{L}(\vec{q},H^c)$ sur K i.e. vérifiant :

$$\mathcal{L}(\vec{Q},H^c) \leqslant \mathcal{L}(\vec{Q},h^c) \leqslant \mathcal{L}(\vec{q},h^c)$$

$$\forall\, q \in K_1 \quad , \quad \forall\, H^c \in K_2$$

Proposition 2.1.

(Le problème (2.7) admet une unique solution $(\vec{Q},h^c) \in K$.
(De plus il existe $h \in H^1(\Omega)$ tel que $(h,\vec{Q})$ soit solution de
((2.1) - (2.5) vérifiant en outre $h = h^c$ sur Γ_3 .

Démonstration.

K_2 est un convexe fermé non vide de $L^2(\Gamma)$.

K_1 est un sous-espace de $L^2(\Omega)$. K_1 est non vide, en effet :

Le problème :

$$\Delta w = i \quad \text{dans } \Omega$$

(2.8)

$$\frac{\partial w}{\partial n} = q_s \quad \text{sur } \Gamma_2$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{\text{mes } (\Gamma_1 \cup \Gamma_3)} \left(\int_\Omega i \, dx - \int_{\Gamma_2} q_s \, d\sigma \right) \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

admet d'après le théorème 1.10 une solution unique à une constante près, dans $H^1(\Omega)$ puisque $i \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial w}{\partial n} \in L^2(\Gamma)$ et que $\int_\Omega i \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial w}{\partial n} d\sigma$.

Donc $\vec{q} = \text{grad } w \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ et $\text{div } \vec{q} = i$, $\vec{q}.\vec{n} = q_s$ donc $\vec{q}$ appartient à K_1 . K_1 est fermé dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

En effet : soit q_m une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, $q_m \in K$. Alors il existe $q \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que $q_m \to q$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. La dérivation est un opérateur continu dans l'espace des distributions donc $\text{div } q_m \to \text{div } q$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\forall_m$, $\text{div } q_m = i$ entraînent $\text{div } q = i$.

$i \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow q \in H(\text{div}, \Omega)$ donc l'opérateur de trace γ_ν linéaire continu sur $H(\text{div}, \Omega)$ permet de définir $\gamma_\nu q = \lim_{m \to \infty} \gamma_\nu q_m$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ d'où $\vec{q}.\vec{n} = q_s$ sur Γ_2 .

$\forall q \in K_1$, $H^c \to \mathcal{J}(q, H^c)$ est strictement concave et Gateaux - différentiable

$\forall H^c \in K_2$, $q \to \mathcal{J}(q, H^c)$ est strictement convexe et Gateaux - différentiable

En outre considérant :

$$\mathcal{J}(q, o) = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{T} |\vec{q}|^2 \, dx + \int_\Gamma h_s^1 \, \vec{q}.\vec{n} \, d\sigma$$

et définissant $\int_\Gamma h_s^1 \, \vec{q}.\vec{n} = \langle \gamma_\nu \vec{q} , h_s^1 \rangle$ comme expression de la dualité $H^{-1/2}(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma)$, on a :

$$\left| \int h_s^1 \, \vec{q}.\vec{n} \, d\sigma \right| < C_1 \, \|h_s^1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\nu q\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$$

(C_1 constante > 0)

avec par ailleurs :

$$||\gamma_\nu q||_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq C_2 \, ||q||_{H(\mathrm{div},\, \Omega)} \qquad (C_2 \text{ constante} > 0)$$

D'où :

$$\mathcal{L}(q, 0) \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{T} |\vec{q}|^2 \, dx - C_1 \, ||h_s^1|| \, ||\gamma_\nu q||$$

$$\geq \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{1}{T} |\vec{q}|^2 \, dx - C_1 C_2 \, ||h_s^1|| \, ||q||_{H(\mathrm{div};\, \Omega)}$$

$$\geq \frac{\alpha}{2} |\vec{q}|^2_{2(\Omega)} - C_1 C_2 \, ||h_s^1|| \, (|\vec{q}|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + |i|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}$$

quantité qui tend vers $+\infty$ quand $|\vec{q}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \to +\infty$

On a aussi :

$$\mathcal{L}(0, H^c) = - \int_\Gamma \frac{a_s}{2} (H^c)^2 \, d\sigma + \int_\Gamma h_s^3 \, a_s \, H^c \, d\sigma$$

qui tend vers $-\infty$ quand $|H^c|^2_{L^2(\Gamma)} \to +\infty$

Donc $\mathcal{L}$ vérifie les conditions de coercivité du théorème qui nous permet d'affirmer qu'un couple unique $(\vec{Q}, h^c) \in K$ solution de (2.7) existe.

Le théorème 1.7 permet de le caractériser :

$(\vec{Q}, h^c)$ vérifie : (2.9) $(\vec{Q}, h^c) \in K$

$$(2.10) \quad \int_\Omega \frac{1}{T} (\vec{Q} - \vec{q}) \, \vec{Q} \, dx + \int_\Gamma h^c \, (\vec{Q} - \vec{q}).\vec{n} \, d\sigma + \int_\Gamma h_s^1 \, (\vec{Q} - \vec{q}).\vec{n} \, d\sigma \geq 0$$

$$, \forall q \in K_1$$

$$(2.11) \quad \int_\Gamma (h^c - H^c)(\vec{Q}.\vec{n} - a_s(h^c - h_s^3)) \, d\sigma \leq 0$$

$$, \forall h^c \in K_2 .$$

Pour interpréter les relations (2.9) - (2.11), il faut établir la proposition suivante :

Proposition 2.2.

Soient $H = \{\vec{q} \in \mathbb{L}^2(\Omega)\ ;\ \vec{q} = \text{grad}p\ ,\ \ p \in H^1(\Omega)\ ,\ \ p = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_1\}$

et $\quad G = \{\vec{q} \in H(\text{div},\Omega\ ;\ \gamma_\nu,\Gamma),\ \text{div}\vec{q} = 0,\ \vec{q}.\vec{n} = 0 \ \text{ sur } \ \Gamma_2\}$

avec Ω de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$

H est l'orthogonal de G dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Cas particulier.

Si $\Gamma_2 = \emptyset$ l'orthogonal de $\{\vec{q} \in H(\text{div},\Omega),\ \text{div}\vec{q} = 0\}$ est $H^1_o(\Omega)$.

Démonstration.

Soit $h \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ tel que $(h, g)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall g \in G$

alors $(h, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vérifiant $\text{div}\,\varphi = 0$.

Un résultat de de Rham (proposition 1.8) nous permet d'affirmer que $h = \text{grad}p$ où $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Or $h \in L^2(\Omega)$, la proposition 1.9 montre que $p \in H^1(\Omega)$.

On a alors :

$$0 = (\vec{h}, \vec{g}) = (\text{grad}p, \vec{g})\ ,\ \forall\ \vec{g} \in G$$

donc en utilisant la formule de Green généralisée :

$$0 = (\vec{h}, \vec{g}) = -\ (p, \text{div}\vec{g}) + \langle \gamma_\nu g\ ,\ \gamma_o p \rangle$$

d'où $\quad \langle \gamma_\nu g\ ,\ \gamma_o p \rangle = 0 \quad$ avec $\gamma_\nu g = 0$ sur Γ_2

d'où $\quad \gamma_o p = 0$ sur Γ_1 .

La réciproque est évidente. ∎

Interprétons (2.9) - (2.11).

(2.10) est réalisée pour tous les $\vec{q}$ vérifiant :

$q = Q + q'$ ou $q = Q - q'$ avec $q' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$, $\text{div}q' = 0$ et $q'.\vec{n} = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Donc (2.10) peut s'écrire :

$$(2.12) \qquad \int_\Omega \frac{1}{T}\,\vec{Q}\,\vec{q}'\ d\sigma + \int_\Gamma h^1_s\ \vec{q}'.\vec{n}\ d\sigma = 0$$

$\forall\ q' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ vérifiant $\text{div}q' = 0$

$q'.\vec{n} = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

$h_s^1 \in H^{1/2}(\Gamma)$ $\Longrightarrow$ il existe $H^s \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0 H^s = h_s^1$

donc

$$\int_\Gamma h_s^1 \vec{q'}.\vec{n}\, d\sigma = \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\, H^s . \vec{q'}\, dx + \int_\Omega H^s \,\text{div}\, q'\, dx$$

et (2.12) devient alors :

$$(2.13) \qquad \int_\Omega \left(\frac{1}{T}\vec{Q} + \overrightarrow{\text{grad}}\, H^s\right) q'\, dx = 0$$

D'où d'après la proposition 2.2 : il existe $p \in H^1(\Omega)$, $p = 0$ sur Γ_1 vérifiant $\frac{1}{T}\vec{Q} + \text{grad}\, H^s = -\text{grad}\, p$ dans Ω et posant alors $h = p + H^s$, le couple $(h, \vec{Q})$ vérifie (2.1) - (2.4).

Une interprétation de (2.10) en prenant $q = Q \pm q'$, $q' \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ vérifiant

$$\text{div}\, q' = 0$$
$$q'.\vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$
$$q'.\vec{n} = -p + h^c \quad \text{sur } \Gamma_3$$

permet d'écrire (2.10) sous la forme :

$$(2.13) \qquad \int_\Omega \frac{1}{T}(\vec{Q} + \text{grad}\, H_s^1).q'\, dx + \int_\Gamma h^c \vec{q'}.\vec{n}\, d\sigma = 0$$

d'où : $$-\int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}}\, p . \vec{q'}\, dx + \int_{\Gamma_3} h^c(h^c - p)\, d\sigma = 0$$

d'où : $$\int_\Omega p\, \text{div}\, q'\, dx + \int_{\Gamma_3} (h^c - p)^2\, d\sigma = 0$$

en utilisant la formule de Green.

Donc $p = h^c$ sur Γ_3 $\Longrightarrow$ $h = h^c$ sur Γ_3

On interprète (2.11) en prenant $H^c = h^c \pm H^{c\prime}$, $H^{c\prime} \in K_2$ ce qui permet d'obtenir (2.5)

$$\vec{Q}.\vec{n} = a_s(h^c - h_s^1) \quad \text{sur } \Gamma_3$$

<u>Proposition 2.3</u>

(Il existe une solution (h,Q) au problème (2.1) - (2.5) celle déterminée
(par la proposition 2.1.

C'est ce que l'interprétation du problème (2.7) vient de montrer.

Le problème (2.7) constitue une formulation variationnelle du problème de départ (2.1) - (2.5) avec conditions aux limites non homogènes et mêlées du type Dirichlet, Neumann ou Fourier. Cependant la discrétisation d'un tel problème n'est pas simple puisqu'elle nécessite la recherche de solutions explicites aux équations de contraintes div q - i = 0, q.n - q_s = 0 dans Ω et Γ_2 tout entiers.

Pour pallier à cette difficulté on utilisera une autre formulation variationnelle, qui consistera en la recherche d'un point-selle d'une autre fonctionnelle qui intégrera dans son expression les contraintes.

Soit $\mathcal{L}(q, \mathcal{H})$ la fonctionnelle définie sur $K = K_1 \times K_2$

$$K_1 = \{ q \in H(\mathrm{div}\,; \Omega\,; \gamma_\nu\,; \Gamma) \}$$

$$K_2 = \{ \mathcal{H} = (H, H^c)\ ;\ H \in L^2(\Omega),\ H^c \in L^2(\Gamma),\ H^c = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \}$$

par
$$\mathcal{L}(q, \mathcal{H}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{T}|\vec{q}|^2 dx - \int_\Omega H(\mathrm{div}\,\vec{q} - i)\,dx + \int_{\Gamma_1} h_s^1 \vec{q}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \int_{\Gamma_2} H^c(\vec{q}\cdot\vec{n} - q_s)\,d\sigma + \int_{\Gamma_3} H^c\left(\vec{q}\cdot\vec{n} - a_s\left(\frac{H^c}{2} - h_s^3\right)\right) d\sigma$$

On définit le problème variationnel :

(2.14) Trouver $\vec{Q} \in K_1$, $\mathcal{H}_0 = (h, h^c) \in K_2$ point-selle de sur K i.e.

vérifiant :

$$\mathcal{L}(\vec{Q}, \mathcal{H}) \leq \mathcal{L}(\vec{Q}, \mathcal{H}_0) \leq \mathcal{L}(q, \mathcal{H}_0) \quad \forall q \in K_1,\ \forall \mathcal{H} \in K_2$$

La caractérisation de ce point-selle permet de définir le problème variationnel équivalent (et qui est celui sur lequel on travaillera par la suite) :

Trouver $\vec{Q} \in K_1$
$(h, h^c) \in K_2$

vérifiant :

(2.15) $$\int_\Omega h'\,\mathrm{div}\,\vec{Q}\,dx = \int_\Omega i\,h'\,dx \quad , \forall h' \in L^2(\Omega)$$

$$(2.16)\quad \int_\Omega \frac{1}{T}\,\vec{Q}\cdot\vec{q}'\,dx - \int_\Omega h\,\mathrm{div}\,q'\,dx + \int_\Gamma h^c\,\vec{q}'\cdot\vec{n} = -\int_\Gamma h_s^2\,\vec{q}'\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$, \forall q' \in K_1$$

$$(2.17)\quad \int_{\Gamma_2} h^{c'}(\vec{Q}\cdot\vec{n} - q_s)\,d\sigma = 0 \quad , \forall h^{c'} \in L^2(\Gamma),\ h^{c'} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

$$(2.18)\quad \int_{\Gamma_3} h^{c'}(\vec{Q}\cdot\vec{n} - a_s(h^c - h_s^2))\,d\sigma = 0 \ , \ \forall h^{c'} \in L^2(\Gamma)\ h^{c'} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

<u>Proposition 2.4</u>

(Si (2.15) - (2.18) admet une solution $[\vec{Q}, (h, h^c)] \in K_1 \times K_2$
(alors elle est unique.

<u>Démonstration</u>

Pour montrer ce résultat il suffit de montrer que l'unique solution du problème (2.15) - (2.18) homogène est la solution (0,0,0).
Supposons donc que $(h, h^c, \vec{Q}) \in K_2 \times K_1$ vérifie :

$$(2.19)\quad \int_\Omega h'\,\mathrm{div}\,\vec{Q}\,dx = 0 \ , \ \forall h' \in L^2(\Omega)$$

$$(2.20)\quad \int_\Omega \frac{1}{T}\,\vec{Q}\cdot\vec{q}'\,dx - \int_\Omega h\,\mathrm{div}\,q'\,dx + \int_\Gamma h^c\,\vec{q}'\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$$

$$\forall q' \in H(\mathrm{div}, \Omega; \gamma_\nu, \Gamma)$$

$$(2.21)\quad \int_\Gamma h^{c'}\,\vec{Q}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0, \ \forall h^{c'} \in L^2(\Gamma),\ h^{c'} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

$$(2.22)\quad \int_\Gamma h^{c'}(\vec{Q}\cdot\vec{n} - a_s h^c)\,d\sigma = 0 \ , \ \forall h^{c'} \in L^2(\Gamma)\ h^{c'} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

Alors (2.19) $\Longrightarrow$ $\operatorname{div} \vec{Q} = 0$ dans Ω

(2.21) $\Longrightarrow$ $\vec{Q} \cdot \vec{n} = 0$ sur Γ_2 dans $L^2(\Gamma)$

(2.22) $\Longrightarrow$ $\vec{Q} \cdot \vec{n} = a_s h^c$ sur Γ_3 dans $L^2(\Gamma)$

Prenant $h^{c'} = h^c$ sur Γ_2 , $h^{c'} = h^c$ sur Γ_3 dans (2.21) et (2.22) on obtient :

(2.23) $$\int_{\Gamma_2} h^c \vec{Q} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

(2.24) $$\int_{\Gamma_3} h^c (\vec{Q} \cdot \vec{n} - a_s h^c) \, d\sigma = 0$$

Prenant $h' = h$ dans (2.19) on obtient :

(2.25) $$\int_{\Omega} h \operatorname{div} \vec{Q} \, dx = 0$$

Prenant alors $q' = Q$ dans (2.20) on obtient :

(2.26) $$\int_{\Omega} \frac{1}{T} |\vec{Q}|^2 \, dx + \int_{\Gamma_2} a_s (h^c)^2 \, d\sigma = 0$$

$$\frac{1}{T} \geq \beta > 0 \quad , \quad a_s \geq \beta > 0 \quad \text{p.p.}$$

entraine :

$Q = 0$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$

$h^c = 0$ sur Γ_3 dans $\mathbb{L}^2(\Gamma)$

Réécrivant alors (2.20) on obtient :

(2.27) $$- \int_{\Omega} h \operatorname{div} q' \, dx + \int_{\Gamma_2} h^c \vec{q'} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

$$\forall q' \in H(\operatorname{div}, \Omega ; \gamma_\nu , \Gamma)$$

Prenons q' vérifiant $\begin{cases} \operatorname{div} q' = h \\ q' \cdot n = -h^c \text{ sur } \Gamma_2 \end{cases}$

Il en existe : il suffit de prendre $q' = \operatorname{grad} w$, $w \in H^1(\Omega)$
w vérifiant $\Delta w = h$, $\frac{\partial w}{\partial n} = -h^c$ sur Γ_2 et

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{mes(\Gamma_1 \cup \Gamma_3)} \left(\int_\Omega h \, dx + \int_{\Gamma_2} h^c d\sigma \right) \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

(2.27) s'écrit alors :

$$- \int_\Omega h^2 dx - \int_{\Gamma_2} (h^c)^2 d\sigma = 0$$

d'où $h = 0$ dans $L^2(\Omega)$

$h^c = 0$ sur Γ_2 dans $L^2(\Gamma)$.

Proposition 2.5

Les problèmes (2.1) - (2.5) et (2.15) - (2.18) sont équivalents dans le sens suivant :

* Si $(h, \vec{Q}) \in H^1(\Omega) \times H(div, \Omega ; \gamma_\nu, \Gamma)$ est solution de (2.1) - (2.5) alors (h, h^c, Q) est solution de (2.15) - (2.18) avec h^c défini par

$$h^c = \gamma_0 h \quad \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

et inversement :

* si (h, h^c, Q) est solution de (2.15) - (2.18) alors $h \in H^1(\Omega)$, $\gamma_0 h = h^c$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et (h, Q) est solution de (2.1) - (2.5).

Démonstration

* La première partie est obtenue facilement :
on multiplie scalairement (2.1) par un élément quelconque h' de $L^2(\Omega)$ ce qui donne (2.15) ;
on multiplie scalairement (2.2) par un élément quelconque q' de $H(div, \Omega ; \gamma_\nu, \Gamma)$, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \vec{q'} \, dx + \int_\Omega \overrightarrow{\operatorname{grad} h} \cdot \vec{q'} \, dx$$

Appliquant la formule de Green généralisée, on obtient :

$$\int_\Omega \frac{1}{T} \vec{Q} \cdot \vec{q'} \, dx - \int_\Omega h \operatorname{div} q' \, dx + \int_\Gamma h \, \vec{q'} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Définissant $h^c = \gamma_0 h$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et utilisant (2.3) $\gamma_0 h = h_s^1$ sur Γ_1 on obtient (2.16)

(2.17) et (2.18) sont obtenus en multipliant scalairement dans respectivement (2.4) et (2.5) par $h^{c'} = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ et $h^{c'} = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

* Inversement, supposons (h, h^c, Q) solution de (2.15) - (2.18). On rappelle que h_s^1, élément de $H^{1/2}(\Gamma)$, est nul sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Il en existe donc un relèvement $H^s \in H^1(\Omega)$ vérifiant $H^s = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$, $H^s = h_s^1$ sur Γ_1. On peut donc écrire :

$$(2.28) \quad \int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}\, H_s} \cdot \vec{q}'\, dx + \int_\Omega H^s \,\text{div}\, q'\, dx = \int_{\Gamma_1} h_s^1 \vec{q}' \cdot \vec{n}\, d\sigma$$

$$\forall q' \in H(\text{div}, \Omega; \gamma_\nu, \Gamma)$$

Exprimant (2.28) dans (2.16) on obtient :

$$(2.29) \quad \int_\Omega \left(\frac{1}{T}\vec{Q} + \overrightarrow{\text{grad}\, H_s}\right) \cdot \vec{q}'\, dx - \int_\Omega (h - H^s)\,\text{div}\, q'\, dx$$

$$+ \int_\Gamma h^c \vec{q}' \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0 \quad , \quad \forall q' \in H(\text{div}, \Omega; \gamma_\nu, \Gamma)$$

Donc prenant q' tel que $\text{div}\, q' = 0$, $q' \cdot n = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$, i.e. prenant $q' \in G$ (G défini dans la proposition 2.2), (2.29) devient :

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{T}\vec{Q} + \overrightarrow{\text{grad}\, H_s}\right) q'\, dx = 0 \quad , \quad \forall q' \in G$$

donc $\frac{1}{T}\vec{Q} + \text{grad}\, H_s$ appartient à l'orthogonal de G, i.e. il existe $p \in H^1(\Omega)$, $p = 0$ sur Γ_1 tel que

$$(2.30) \quad \frac{1}{T}\vec{Q} + \text{grad}\, H_s = \text{grad}\, p$$

Réécrivant alors (2.29) on obtient : $\forall q' \in H(\text{div}, \Omega; \gamma_\nu, \Gamma)$

$$\int_\Omega \overrightarrow{\text{grad}\, p} \cdot \vec{q}'\, dx - \int_\Omega (h - H^s)\,\text{div}\, q'\, dx + \int_\Gamma h^c \vec{q}' \cdot \vec{n}\, d\sigma = 0$$

On applique la formule de Green :

$$-\int_\Omega (p+h-H^s)\,\mathrm{div}\,q'\,dx + \int_\Gamma (p+h^c)\,\vec{q'}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$$

$$\forall q' \in H(\mathrm{div},\Omega;\gamma_\nu,\Gamma)$$

Prenant q' vérifiant $\begin{cases} \mathrm{div}\,q' = p+h-H^s \\ \vec{q'}\cdot\vec{n} = -(p+h^c) \quad \text{sur } \Gamma_2\cup\Gamma_3 \end{cases}$

(il en existe : il suffit de prendre $\vec{q'} = \mathrm{grad}\,w$, $\Delta w = p+h-H^s$

$w \in H^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial w}{\partial n} = -(p+h^c)$ sur $\Gamma_2\cup\Gamma_3$

$= \dfrac{1}{\mathrm{mes}(\Gamma_1)}\left[\int_\Omega (p+h-H^s)\,dx + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}(p-h^c)\,d\sigma\right]$

On obtient :

$$\int_\Omega (p+h-H^s)^2\,dx + \int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}(p+H^c)^2\,d\sigma = 0$$

d'où $h = -p + H^s$ dans $L^2(\Omega)$

$p = -h^c$ sur $\Gamma_2\cup\Gamma_3$ dans $L^2(\Gamma)$

Donc d'après (2.30) on obtient (2.2) :

$$\frac{1}{T}\vec{Q} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,h}\ ,\ h \in H^2(\Omega)$$

et par ailleurs :

$$h = -p + H^s \implies h = H^s = h_s^1 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ainsi que $h = -p = h^c$ sur $\Gamma_2\cup\Gamma_3$

Enfin clairement (2.15) $\implies$ $\mathrm{div}\,\vec{Q} = i$ dans $L^2(\Omega)$

(2.17) $\implies$ $\vec{Q}\cdot\vec{n} = q_s$ sur Γ_2

(2.18) $\implies$ $\vec{Q}\cdot\vec{n} = a_s(h^c - h_s^3)$ sur Γ_3

$\implies$ $\vec{Q}\cdot\vec{n} = a_s(h - h_s^3)$ sur Γ_3

Proposition 2.6

(Il existe une unique solution

$$h \in L^2(\Omega)$$
$$h^c \in L^2(\Gamma), \quad h^c = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$
$$\vec{Q} \in H(\mathrm{div}, \Omega ; \gamma_\nu, \Gamma)$$

(au problème (2.15) - (2.18).

(De plus, $h \in H^1(\Omega)$ et $(h, \vec{Q})$ est l'unique solution

(de (2.1) - (2.5) dans $H^1(\Omega) \times H(\mathrm{div}, \Omega ; \gamma_\nu, \Gamma)$

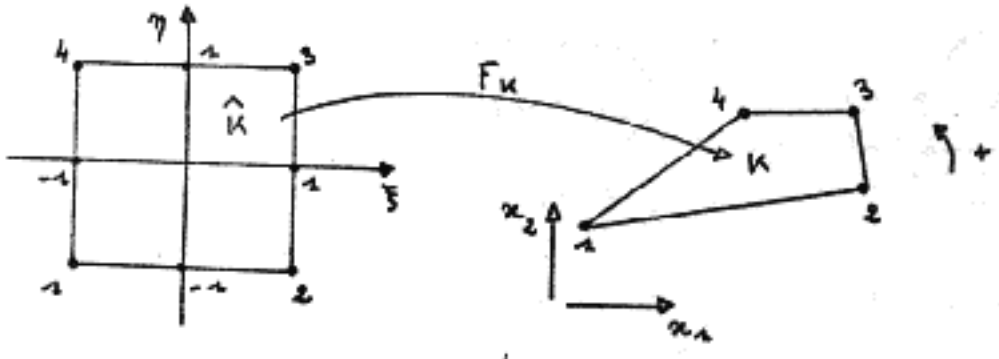
Démonstration.

La proposition (2.3) assure l'existence d'une solution à (2.1) - (2.5). La proposition (2.5) nous assure donc l'existence dans (2.15) - (2.18). L'unicité à (2.15) - (2.18) a été montrée dans la proposition (2.4). Et cela entraîne l'unicité dans (2.1) - (2.5) comme conséquence des propositions 2.4 et 2.5.

3 - Approximation des espaces - une condition de compatibilité.

On considère, dans tout ce qui suit, que Ω est un domaine polygonal subdivisé en KMAX mailles quadrilatérales. Ce maillage présente un certain nombre de caractères énoncés plus bas.

Toute maille K de ce maillage est l'image par une application F_K d'une maille de référence $\hat{K}$:



définie par :

$$x_1(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_1(i)\, \ell_i(\xi,\eta)$$
$$x_2(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_2(i)\, \ell_i(\xi,\eta)$$

où ($x_1(i)$, $x_2(i)$) désigne les coordonnées du sommet i de K et où les fonctions $\ell_i(\xi,\eta)$ sont définies par :

$$\text{(3.0)} \qquad \begin{aligned} \ell_1(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ \ell_2(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ \ell_3(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ \ell_4(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad , -1 \leq \xi, \eta \leq 1$$

caractères du maillage

Il s'agit d'un maillage d'un nombre fini de quadrilatères convexes non dégénérés en triangles présentant les caractères suivants :

(caractère 1
(Un côté d'un quadrilatère soit est sur la frontière, soit est en entier le
(côté d'un et un seul autre quadrilatère.

Ce caractère exclut donc les situations du type de celles de la figure 1.

fig. 1

(Caractère 2
(Tout sommet i d'un quadrilatère est sommet d'exactement quatre quadrilatères
(si i est intérieur au domaine. Il peut être sommet de 2 (cas de segments
("alignés" : fig. 2), de 1 (cas d'un "coin convexe" : fig. 3) ou de 3 quadri-
(latères (cas d'un "coin concave" : fig. 4) s'il est sur la frontière.

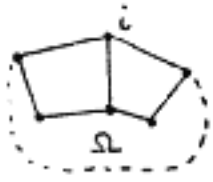


fig. 2

fig. 3

Fig. 4

Cela exclut des situations du type de celles figurées dans les figures 5 et 6.

fig. 5

fig. 6

(Caractère 3
(Un côté de quadrilatère ne peut relier 2 points de la frontière s'il n'est
(pas lui-même inclus dans la frontière.

Ceci exclut des resserrements du maillage tels que ceux décrit par les figures 7 et 8.

fig. 7

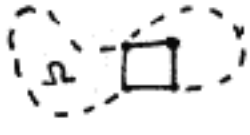


fig. 8

Approximation des espaces

Nous devons approximer les espaces $L^2(\Omega)$, $H(\mathrm{div},\Omega;\gamma_\nu,\Gamma)$ et $V^c = \{h^c \in L^2(\Gamma);\ h^c = 0$ sur $\Gamma_1\}$ dans lesquels sont définis respectivement les piézométries h les flux de mélange $\vec{Q}$ et les piézométries de contour h^c sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$.
On définit les schémas :

$$(1) \qquad L^2(\Omega) \underset{r_h}{\overset{id.}{\rightleftarrows}} V_h$$

avec $V_h = \{v_h \in L^2(\Omega)\ ;\ v_h =$ constante sur chacune des mailles du maillage $\}$

on définit π_h^1 par

$$\pi_h^1 u(M) = \frac{1}{mes(K)} \left(\int_K u(x)\,dx \right) \quad , \forall M \in K$$

(K désigne une maille de Ω)

(2) $$H(div, \Omega ; \gamma_\nu , \Gamma) \underset{\pi_h^2}{\overset{id.}{\rightleftarrows}} W_h$$

où W_h est l'ensemble des vecteurs $\vec{\psi}_h$ de $H(div,\Omega;\gamma_\nu,\Gamma)$ qu'il est commode de définir en se ramenant à la maille de référence $\hat{K}$. Sur une maille K on a :

$$\left.\begin{aligned} \psi_h^1(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} \psi_h^1(i)\, l_i(\xi,\eta) \\ \psi_h^2(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{4} \psi_h^2(i)\, l_i(\xi,\eta) \end{aligned}\right. \quad , -1 \leq \xi, \eta \leq 1$$

$\vec{Q}$ est donc approché de la même façon que sont représentées les coordonnées x_1 et x_2 . Il s'agit d'éléments isoparamétriques de degré 1. π_h^2 est défini sur un sous-espace dense de $H(div,\Omega;\gamma_\nu,\Gamma)$, par exemple les vecteurs à composant dans $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, par

$$\vec{\psi} \longrightarrow \pi_h^2 \vec{\psi} = \vec{\psi}_h \in W_h \ , \text{ avec } \vec{\psi}_h(i) = \vec{\psi}(i)$$

(3) $$V^c \underset{\pi_h^3}{\overset{id.}{\rightleftarrows}} V_h^c$$

avec $V_h^c = \{ v_h^c \in V^c \ ; \ v_h^c =$ constante sur chacun des segments frontières de $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \}$

on définit π_h^3 par

$$\pi_h^3 u(M) = \frac{1}{mes(L)} \left(\int_L u(x)\,d\sigma \right) \quad , \forall M \in L$$

(L désigne un segment-frontière $\subset \Gamma_2 \cup \Gamma_3$)

Les erreurs de troncature pour le schéma (1)-(2)-(3) sont données dans Ciarlet-Raviart [5].

Pour ce faire on considérera que les espaces approchés indicés par h sont associés à des maillages $\mathcal{M}_h$ vérifiant le caractère suivant.

Caractère 4

on définit h_K = diamètre de l'élément K

ρ_K = sup { diamètres des cercles inscrits dans K }

$(\theta_i)_{i=1,4}$ = angles des quadrilatères

la famille $\{\mathcal{M}_h\}$ vérifie :

* $h = \max\{h_K \,;\, K \in \mathcal{M}_h\}$ tend vers 0
* il existe deux constantes $c, \gamma > 0$ telles que

$$\forall h,\ \forall K \in \mathcal{M}_h,\quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq c \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i \leq 4} |\cos\theta_i| \leq \gamma < 1$$

Proposition 3.1

Sous les hypothèses précédentes on a au moins les majorations suivantes :

$$\forall h \in H^1(\Omega),\ |h - r_h^1 h|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 h$$
$$\forall h^c \in H^1(\Gamma),\ h^c = 0 \text{ sur } \Gamma_1,\ |h^c - r_h^3 h^c|_{L^2(\Gamma)} \leq c_2 h$$
$$\forall \vec{Q} \in \mathbb{H}^2(\Omega),\ |\vec{Q} - r_h^2 \vec{Q}|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c_3 h^2$$
$$,\ |\operatorname{div}\vec{Q} - \operatorname{div}(r_h^2 \vec{Q})|_{L^2(\Omega)} \leq c_4 h$$
$$,\ |\vec{Q}\cdot\vec{n} - r_h^3 \vec{Q}\cdot\vec{n}|_{L^2(\Gamma)} \leq c_5 h^2$$

où $(c_i)_{i=1,\dots,5}$ sont des constantes > 0 indépendantes de h

Une condition de compatibilité des éléments

La démonstration de l'existence et de l'unicité de solutions au problème approché nécessitera une condition de compatibilité entre les différents éléments finis et ce dans le même but que celles que Brezzi [6] énonce.

On l'énonce de la façon suivante :

Condition 3.1

Soient h_h un élément de V_h

h_h^c un élément de V_h^c vérifiant :

$$(3.1)\quad -\int_\Omega h_h \operatorname{div}\psi_h \, dx + \int_\Gamma h_h^c \, \vec{\psi}_h \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \quad ,\ \forall \psi_h \in W_h$$

ALORS $h_h = 0$ dans Ω

$h_h^c = 0$ sur Γ

Raviart [7] utilise, en outre, une condition supplémentaire qui s'énoncerait dans notre cas de la façon suivante :

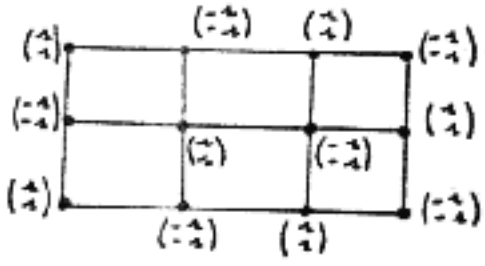
Soit Q_h un élément de W_h vérifiant

$$(3.2)\quad \int_\Omega h_h' \operatorname{div}\vec{Q}_h \, dx = 0 \quad ,\ \forall h_h' \in V_h$$

$$(3.3)\quad \int_\Gamma h_h^{c\,\prime} \, \vec{Q}_h \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \quad ,\ \forall h_h^{c\,\prime} \in V_h^c$$

ALORS $\operatorname{div} Q_h = 0$ dans Ω, $\vec{Q}_h \cdot \vec{n} = 0$ sur $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

On verra par la suite que l'existence et l'unicité de solutions au problème approché est assurée sans une telle condition qui ne serait pas remplie dans notre cas pour tous les $\vec{Q}_k$ sur certains types de maillages.
Par exemple prenant $\vec{Q}_k$ valant alternativement $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ sur les sommets d'un maillage rectangulaire (voir fig. 9) cette condition ne serait pas remplie.



(fig. 9)

La condition 3.1 est satisfaite sous les hypothèses de la proposition suivante :

Proposition 3.2

Un maillage rectangulaire possédant les caractère 1 - 2 - 3 et le caractère 5 défini plus bas confère aux éléments finis utilisés la propriété de compatibilité 3.1. Moyennant une condition supplémentaire (annexe (2)) cela est réalisé pour les maillages non rectangulaires.

Le caractère 5 qui suit est destiné à prévenir l'isolement de tous les segments de type Dirichlet entre des segments de type Neumann.

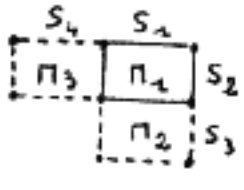
Caractère 5

La partie Γ_1 de la frontière, où la condition à la limite est du type Dirichlet est telle que l'une, au moins, des 2 propriétés suivantes est réalisée :

ⓐ Γ_1 contient 2 segments adjacents dont l'extrémité commune est sommet d'exactement 2 mailles. (segments "alignés". fig. 2)

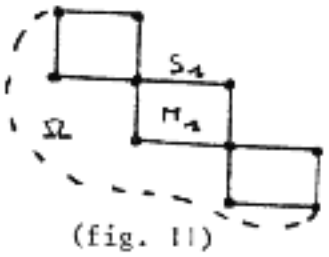
ⓑ Γ_1 contient un segment du type "coin convexe" (fig. 3) tel que un des sommets de la maille adjacente soit sommet d'exactement 2 mailles.

explication :



(fig. 10)

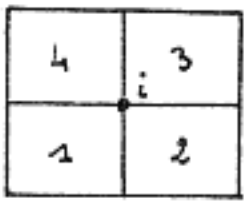
Le caractère 5.b signifie que si le segment S_1 est $\subset \Gamma_1$ alors nécessairement soit Π_2 existe avec $S_3 \subset \Gamma$
soit Π_3 existe avec $S_4 \subset \Gamma$
Ceci exclut un cas du type de celui représenté par la fig. 11 où S_1 segment de Γ_1 ne conviendrait pas.



(fig. 11)

démonstration de la proposition 3.2

Nous reportons en annexe (2) à la fin du chapitre, la démonstration dans le cas général pour ne pas alourdir l'exposé. Nous allons la montrer ici dans le cas d'un maillage en carrés égaux.



(fig. 12)

soit i un sommet intérieur au domaine. On écrit la relation (3.1) en prenant successivement

$$\vec{\psi}_k = (l_i, 0) \quad \text{et} \quad \vec{\psi}_k = (0, l_i)$$

où li a été défini sur chaque maille par les relations (3.0)

Cela donne le système :

$$(3.4) \quad \begin{cases} h_1 - h_2 - h_3 + h_4 = 0 \\ h_1 + h_2 - h_3 - h_4 = 0 \end{cases}$$

où h_j, $j = 1, \ldots\ldots, 4$ désigne la valeur de h dans la maille j (numérotation de la fig. 12)

Ce qui signifie :

$$(3.5) \quad \begin{cases} h_1 = h_3 \\ h_2 = h_4 \end{cases}$$

En écrivant cela pour tout i intérieur au domaine et en utilisant les caractères 1 et 3 du maillage, on obtient deux familles de h_j, $j=1, KMAX$, dans lesquelles h_j a même valeur (égalités "en diagonale" entres les h_j des mailles adjacentes uniquement par un sommet).

En écrivant enfin (3.1) pour $\vec{\psi}_k = (li, o)$ et $\vec{\psi}_k = (o, li)$ pour tout i, sommet appartenant à la frontière, et Γ_1 étant $\neq \emptyset$ on obtient :

$$\begin{cases} h^c = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \\ h = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

∎

4 - Problème approché

On le définit par :

trouver $h_k \in V_k$, $h_k^c \in V_k^c$, $\vec{Q}_k \in W_k$ tels que

(4.1) $\int_\Omega g_k \operatorname{div} Q_k \, dx = \int_\Omega f g_k \, dx \quad , \forall g_k \in V_k$

(4.2) $\int_\Omega \frac{1}{T} \vec{Q}_k \vec{\psi} \, dx - \int_\Omega h_k \operatorname{div} \psi \, dx + \int_\Gamma h_k^c \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = - \int_\Gamma h_s^1 \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma \quad , \forall \psi \in W_k .$

(4.3) $- \int_{\Gamma_2} g_k^c (\vec{Q}_k \cdot \vec{n} - q_s) \, d\sigma = 0 \quad , \forall g_k^c \in V_k^c .$

(4.4) $- \int_{\Gamma_3} g_k^c (\vec{Q}_k \cdot \vec{n} - a_s (h_k^c - h_s^3)) \, d\sigma = 0 \quad , \forall g_k^c \in V_k^c .$

Proposition 4.1.

Il existe une unique solution au problème (4.1)-(4.4)

démonstration.

KMAX, LMAX, IMAX étant respectivement le nombre de mailles, de segments de $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ et de noeuds du domaine, le problème (4.1)-(4.4.) est équivalent à un système linéaire de (KMAX + LMAX + IMAX) équations à autant d'inconnues. Il suffit donc de montrer que l'unique solution du problème homogène est la solution nulle. Le problème homogène s'écrit :

(4.5) $\int_\Omega g_k \operatorname{div} Q_k \, dx = 0 \quad , \forall g_k \in V_k$

(4.6) $\int_\Omega \frac{1}{T} Q_k \psi \, dx - \int_\Omega h_k \operatorname{div} \psi \, dx + \int_\Gamma h_k^c \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \quad , \forall \psi \in W_k .$

(4.7) $- \int_{\Gamma_2} g_k^c \vec{Q}_k \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 , \forall g_k^c \in V_k^c$

(4.8) $- \int_{\Gamma_3} g_k^c (\vec{Q}_k \cdot \vec{n} - a_s h_k^c) \, d\sigma \quad , \forall g_k^c \in V_k^c$

Prenant $g_k = h_k$, $g_k^c = h_k^c$, $\psi = Q_k$ et ajoutant (4.5),(4.6),(4.7) et (4.8) on obtient :

(4.9) $\int_\Omega \frac{1}{T} |Q_k|^2 \, dx + \int_{\Gamma_3} a_s (h_k^c)^2 \, d\sigma = 0$

d'où , en utilisant les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$, $Q_k = 0$ dans Ω et $h_k^c = 0$ sur Γ_3 réécrivant alors (4.6) on obtient :

(4.10) $- \int_\Omega h_k \operatorname{div} \psi \, dx + \int_{\Gamma_2} h_k^c \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 , \quad \forall \psi \in W_k .$

et (4.10)entraine d'après la condition de compatibilité 3.1 que

$h_k = 0$ dans Ω , $h_k^c = 0$ sur Γ_2 . ■

h_s^1 est approximée par des constantes sur les segments, définies par $h_s^1(c) = (\int_c h_s^1 \, d\sigma) \, (\text{mes}(c))^{-1}$.

La résolution numérique de (4.1)-(4.4) est facilitée si l'on applique une formule d'intégration numérique aux intégrales.

Cette formule est donnée par :

(4.11) $\int_K (p(x)) \, dx \approx \sum_{i=1}^{4} p(i) \int_K l_i(x) \, dx$

K est 1 maille quelconque, li (x) la fonction de base associée au sommet i de K. Cette formule est vraie pour les fonctions de base. Son choix permettra d'assurer la consistance de la méthode.

L'intégration numérique donne :

$$\int_\Omega \frac{1}{T} q_h \psi \, dx \approx \sum_i \left[\left(Q_h^1(i)\psi^1(i) + Q_h^2(i)\psi^2(i) \right) \sum_K \int_K \frac{1}{T} l_i \, dx \right]$$

on notera cette forme bilinéaire approchée : $k_h(q_h, \psi)$

k_h possède la propriété suivante :

Proposition 4.2

$$\forall q_h \in W_h,$$

$$|E| = \left| \int_\Omega \frac{1}{T} |q_h|^2 dx - k_h(q_h, q_h) \right| \leq c\, h^2 \left(\sum_i \left(|Q_h^1(i)|^2 + |Q_h^2(i)|^2 \right) \right)$$

où c est une constante positive indépendante de h.

démonstration

en se ramenant au carré de référence $\hat{K}$ selon la transformation F_K de Jacobien J_K (cf.Annexe (1))on a les inégalités :

$$(4.13) \quad \int_K \frac{1}{T} \left| \frac{\partial l_i}{\partial x_1} \right| dx \leq c \frac{\sup J_K}{\inf J_K} \max \left(\int_{\hat{K}} \left| \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right| d\hat{x}, \int_{\hat{K}} \left| \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \right| \right)$$

$$\leq c' \frac{h_K^2}{\rho_K^2} h_K \leq c'' h_K, \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

et de même :

$$(4.14) \quad \int_K \frac{1}{T} \left| \frac{\partial l_i}{\partial x_2} \right| dx \leq c'' h_K, \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

$$(4.15) \quad \int_K \frac{1}{T} \left| \frac{\partial (l_i l_j)}{\partial x_n} \right| dx \leq c'' h_K, \quad \forall i, j = 1, 4, \quad \forall n = 1, 2$$

soit $R_K^\ell = |q_h^\ell(M)|^2 - \sum_{j=1}^4 |q_h^\ell(j)|^2 l_j \quad , \quad \ell = 1, 2$

Appliquant à R_K^ℓ la formule de Taylor entre un point M quelconque de K et un des sommets i de la maille K on obtient :

$$(4.16) \quad R_K^\ell = \left(|q_h^\ell(i)|^2 - |q_h^\ell(i)|^2 \right) + \overrightarrow{iM} . \overrightarrow{\text{grad}}\, R_K^\ell(M')$$

où M' est un point de K.

d'où $|R_K^\ell| \leq c_1 h_K \max_{n=1,2} \left| \frac{\partial}{\partial x_n} \left(|q_h^\ell|^2 - \sum_{j=1}^4 |q_h^\ell(j)|^2 l_j \right) \right|$

et comme $|q_h^\ell|^2 \leq \sum_{j,k=1}^4 |q_h^\ell(j)| |q_h^\ell(k)| l_j l_k$ on a :

$$(4.17) \quad |E_K^\ell| = \int_K \frac{1}{T} R_K^\ell dx \leq c_2 h_K \max_{n=1,2} \left(\sum_{j,k=1}^4 |q_h^\ell(j)| |q_h^\ell(k)| \int_K \frac{1}{T} \left| \frac{\partial (l_j l_k)}{\partial x_n} \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^4 |q_h^\ell(j)|^2 \int_K \frac{1}{T} \left| \frac{\partial l_j}{\partial x_n} \right| dx \right)$$

utilisant (4.13)-(4.15), (4.17) donne :

$$|E_K^\ell| \leq c_3 h_K^2 \left(\sum_{i,j=1}^4 |q_h^\ell(j)| |q_h^\ell(k)| + \sum_{j=1}^4 |q_h^\ell(j)|^2 \right)$$

d'où :

(4.18) $|E_K^\ell| \leq c_4 h^2 \left(\sum_{i=1}^{4} |q_h^\ell(i)|^2 \right)$, où c est une constante positive indépendante de h

d'où : $|E| \leq \left| \sum_{\ell=1}^{2} \sum_K |E_K^\ell| \right| \leq \sum_{\ell=1}^{2} \left(\sum_K c_5 h^2 \left(\sum_{i(K)=1}^{4} |q_h^\ell(i)|^2 \right) \right)$

$$\leq c\, h^2 \left(\sum_i \left(|q_h^1(i)|^2 + |q_h^2(i)|^2 \right) \right)$$

■

On peut écrire le problème approché (4.1)-(4.4) sous forme matricielle :

en écrivant (4.1) pour $g_h = \mathbb{1}_K$, $K = 1, \ldots, K_{max}$ on obtient :

$$\int_K \operatorname{div} Q_h \, dx = \int_K f \, dx \quad , \quad \forall K = 1, \ldots, K_{max}$$

ou encore : $\sum_{i=1}^{4} \left[Q_h^1(i) \int_{\partial K} \varphi_i \cdot n_1 \, d\sigma + Q_h^2(i) \int_{\partial K} \varphi_i \cdot n_2 \, d\sigma \right] = \int_K f \, dx$

qu'on écrit :

(4.19) $\sum_{i=1}^{4} \left[A_{K,i}^1 Q_h^1(i) + A_{K,i}^2 Q_h^2(i) \right] = S_K^1$

en posant $A_{K,i}^1 = \int_{\partial K} \varphi_i \cdot n_1 \, d\sigma$, n_1, n_2 composantes de $\vec{n}$

$A_{K,i}^2 = \int_{\partial K} \varphi_i \cdot n_2 \, d\sigma$, $S_K^1 = \int_K f \, dx$.

en écrivant (4.3) pour $g_h^c = \mathbb{1}_L$, L 1 segment quelconque de Γ_2

on obtient : $\int_L \vec{Q}_h \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_L q_s \, d\sigma$, $\forall L$ segment de Γ_2

qu'on peut écrire :

$$-\sum_{i=1}^{4} \left[Q_h^1(i) \int_L \varphi_i \cdot n_1 \, d\sigma + Q_h^2(i) \int_L \varphi_i \cdot n_2 \, d\sigma \right] = -\int_L q_s \, d\sigma$$

qui s'écrit :

(4.20) $\sum_{i=1}^{2} \left[B_{L,i}^1 Q_h^1(i) + B_{L,i}^2 Q_h^2(i) \right] = S_L^2$

en posant : $B_{L,i}^1 = -\int_L \varphi_i \cdot n_1 \, d\sigma$, $S_L^2 = -\int_L q_s \, d\sigma$

$B_{L,i}^2 = -\int_L \varphi_i \cdot n_2 \, d\sigma$,

on écrit (4.4) pour $g_h^c = \mathbb{1}_L$, L1 segment quelconque de Γ_3

on obtient :

$$\int_L \vec{Q}_h \cdot \vec{n} \, d\sigma - \int_L a_s h_h^c \, d\sigma = \int_L a_s h_s^3$$

qu'on peut écrire :

$$-\sum_{i=1}^{2} \left[Q_h^1(i) \int_L \varphi_i \cdot n_1 \, d\sigma + Q_h^2(i) \int_L \varphi_i \cdot n_2 \, d\sigma \right] + h_h^c(i) \int_L a_s \, d\sigma = -\int_L a_s h_s^3 \, d\sigma$$

qui s'écrit :

(4.21) $\sum_{i=1}^{2} \left[B_{L,i}^1 Q_h^1(i) + B_{L,i}^2 Q_h^2(i) \right] + R_L h_h^c(i) = S_L^2$

en posant : $R_L = \int_L a_s \, d\sigma$, $S_L^2 = -\int_L a_s h_s^3 \, d\sigma$.

Enfin en écrivant (4.2) successivement pour $\psi = (1i,o)$ et $\psi = (o,1i)$ et en utilisant la formule (4.11) on obtient si K (respectivement L) désigne une maille (respectivement un segment du bord $\notin \Gamma_1$) ayant i pour sommet :

$$(4.22) \quad K_i\, Q_k^1(i) - \sum_K h_k(K)\, A_{K,i}^1 - \sum_L h_k^c(L)\, B_{L,i}^1 = -\int_{\Gamma_1} h_s^1\, \ell_i . n_1\, d\sigma$$

$$(4.23) \quad K_i\, Q_k^2(i) - \sum_K h_k(K)\, A_{K,i}^2 - \sum_L h_k^c(L)\, B_{L,i}^2 = -\int_{\Gamma_1} h_s^1\, \ell_i . n_2\, d\sigma$$

on pose : $\quad K_i = \sum_{K=1}^{4} \int_K \frac{1}{T}\, \ell_i\, dx$

$$S_i^3 = -\int_{\Gamma_1} h_s^1\, \ell_i\, n_1\, d\sigma \;,\quad S_i^4 = -\int_{\Gamma_1} h_s^1\, \ell_i\, n_2\, d\sigma$$

On peut regrouper (4.19)-(4.23) sous la forme matricielle suivante:

$$(4.24) \quad A^1 \{Q_k^1\} + A^2 \{Q_k^2\} = \{S^1\}$$

$$(4.25) \quad B^1 \{Q_k^1\} + B^2 \{Q_k^2\} + R \{h_k^c\} = \{S^2\}$$

$$(4.26) \quad K \{Q_k^1\} - {}^TA^1 \{h_k\} - {}^TB^1 \{h_k^c\} = \{S^3\}$$

$$(4.27) \quad K \{Q_k^2\} - {}^TA^2 \{h_k\} - {}^TB^2 \{h_k^c\} = \{S^4\}$$

où K est une matrice ($IMAX \times IMAX$) diagonale à coefficients positifs

A^1, A^2 sont ($KMAX \times IMAX$) et ${}^TA^1, {}^TA^2$ sont leurs tranposées

B^1, B^2 sont ($LMAX \times IMAX$) et ${}^TB^1, {}^TB^2$ sont leurs transposées

R est diagonale ($LMAX \times LMAX$). Elle comporte des coefficients positifs (éventuellement nuls) sur la diagonale .

Leurs coefficients calculés en se ramenant à la maille de référence sont déterminés en annexe (1).

5. Stabilité de la méthode

Nous allons étudier la stabilité de la méthode dans le cas du problème avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes (i.e $h_S^1 = 0$ sur Γ).
L'élimination de $\{Q_k\}$ entre les équations (4.24)-(4.26)-(4.27) conduit à la résolution du système :

$$(5.1) \quad D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD\,\{h_k\} = \{H^1\}$$

où $D = (A_1, A_2)$, $\mathbb{K}^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}$

, $H^1 = \{H_K^1\}$ avec $H_K^1 = \int_K f\,dx$

L'étude de la matrice $D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD$ va nous permettre de conclure à la stabilité des solutions h_k. Pour cela nous montrerons qu'on peut minorer l'expression $E = \int_\Omega h_k \operatorname{div} Q_k\,dx$ qui n'est rien d'autre que :

$$(5.2) \quad E = \{{}^Th_k\}\,D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD\,\{h_k\}$$

Les coefficients $\frac{1}{K_i}$ de la matrice diagonale $\mathbb{K}^{-1}$ sont tels qu'il existe une constante positive c, indépendante de k, telle que $\frac{1}{K_i} \geq \frac{c}{k^2}$ pour tout i.
On en déduit $E = \{{}^Th_k\}\,D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD\,\{h_k\} \geq \frac{c}{k^2}\{{}^Th_k\}\,D\,{}^TD\,\{h_k\}$

d'où $E \geq \frac{c}{k^2}\,\|{}^TD\,\{h_k\}\|^2$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne)

On voit que $D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD$ est une matrice symetrique positive. Elle est de plus définie positive puisque affirmer que :

$${}^TD\,\{h_k\} = 0 \implies \{h_k\} = 0$$

, c'est exactement affirmer la condition de compatibilité 3.1 .

On sait donc qu'il existe un nombre α (dépendant de k), tel que :

$$E = \{{}^Th_k\}\,D\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^TD\,\{h_k\} \geq \alpha\,\|h_k\|^2 \quad , \alpha > 0$$

Mais cette condition ne nous renseigne pas sur la façon dont α dépend de k et ne nous permet donc pas de conclure à la stabilité du schéma.

Nous allons montrer que cette constante est de l'ordre de k^2.
Explicitons l'expression E .

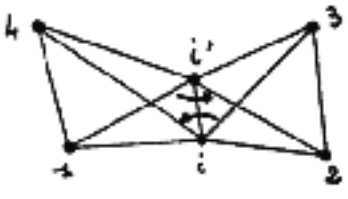
$$E = \sum_{K=1}^{KMAX} h_K \left[\sum_{i=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{2} \frac{A^{\ell}_{K,i}}{K_i} \sum_{K'=1}^{4} \left(A^{\ell}_{K',i}\, h_{K'} \right) \right]$$

E peut s'écrire $E = E_1 + E_2$ avec :

$$(5.3) \quad E_1 = \sum_{i=1}^{IMAX} \sum_{(K,K')=1}^{Q} \sum_{\ell=1}^{2} \frac{1}{K_i} \left[\left(A^{\ell}_{K,i}\, h_K + A^{\ell}_{K',i}\, h_{K'} \right)^2 \right]$$

où (K,K') désigne un des couples de mailles ayant 1 et 1 seul sommet commun.

$$(5.4) \quad E_2 = 2 \sum_{S=1}^{SMAX} \left[\sum_{\ell=1}^{2} \left(\frac{A^{\ell}_{K,i}\, A^{\ell}_{K',i}}{K_i} + \frac{A^{\ell}_{K,i'}\, A^{\ell}_{K',i'}}{K_{i'}} \right) \right] h_K\, h_{K'}$$



(fig. 5.1)

où K et K' désignent 2 mailles ayant un côté S commun de sommet i et i'.

Le calcul en utilisant l'annexe (1) montre que:

$$\forall i, \quad \sum_{\ell=1}^{2} \frac{1}{K_i} A^{\ell}_{K,i}\, A^{\ell}_{K',i} = - \frac{|\overrightarrow{M_iM_4}|\,|\overrightarrow{M_iM_3}|}{K_i} \cos\left(\overrightarrow{M_iM_4}, \overrightarrow{M_iM_3}\right)$$

Donc $E_2 = 0$ si le maillage est un maillage de **parallélogrammes égaux**
On aboutira à des résultats de **stabilité identiques** si la condition suivante est remplie :(5.5) $\left| \cos\left(\frac{\alpha_i - \alpha_{i'}}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i'}}{2}\right) \right| \leq c\, h^2 \varepsilon(h)$, $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} c$
où α_i désigne l'angle formé par les diagonales de deux mailles adjacentes par un coté, issues d'un même sommet i .

<u>Proposition 5.1</u>

Dans un maillage de parallélogrammes egaux la solution (h_h, Q_h) du problème (5.1) vérifie :

$$(5.6) \quad E = \int_\Omega h_h \operatorname{div} \overrightarrow{Q_h}\, dx \geq c\, |h_h|^2_{L^2(\Omega)}$$

où c est une constante positive indépendante de k .

démonstration.

Pour montrer l'inégalité (5.6) on va montrer que la présence de la frontière de Dirichlet permet d'écrire la forme quadratique E_1 sous la forme d'une somme de termes positifs et de termes non croisés i.e. du type h_k^2.
Soit $1, 2, \ldots, p$ les numéros d'une chaine de mailles du domaine dont la première est adjacente par un côté à la frontière et dont les suivantes sont adjacentes les unes aux autres par un et un seul sommet.

Dans le cas d'un maillage en parallélogrammes égaux on a :

$$E = E_1 \quad \text{et} \quad A^{\ell}_{k,i} = -A^{\ell}_{k',i} \text{ de l'ordre de } k^2 \text{ (cf. annexe (1))}$$

d'où
$$E \geqslant c \sum_{i=1}^{\text{nAx}} \sum_{(k,k')=1}^{2} (h_k - h_{k'})^2$$

Soit N_0 un nombre à déterminer, on a :

$$E_1^1 = 2h_1^2 - 2h_1 h_2 = \frac{1}{N_0} h_1^2 + \left(\sqrt{2-\frac{1}{N_0}}\, h_1 - \sqrt{\frac{N_0}{2N_0-1}}\, h_2\right)^2 - \frac{N_0}{2N_0-1} h_2^2$$

d'où :
$$E_1^1 \geqslant \frac{1}{N_0} h_1^2 + \varepsilon_1^2 - \lambda_2 h_2^2$$

avec
$$\varepsilon_1 = \left[\left(2-\frac{1}{N_0}\right)^{1/2} h_1 - \left(\frac{N_0}{2N_0-1}\right) h_2\right]$$

et
$$\lambda_2 = \frac{N_0}{2N_0-1} < 2/3 \quad (\text{dès que } N_0 > 2)$$

définissant :
$$E_1^r = 2h_r^2 - 2h_r h_{r+1}$$
on suppose qu'on a une inégalité du type :

$$\sum_{r=1}^{p-1} E_1^r \geqslant \frac{1}{N_0} \sum_{r=1}^{p-1} \varepsilon_r^2 - \lambda_p h_p^2 \tag{5.8}$$

avec
$$\lambda_p < \frac{2p-2}{2p-1}$$

alors on a :

$$\sum_{r=1}^{p} E_1^r \geqslant \frac{1}{N_0} \sum_{r=1}^{p-1} h_r^2 + \sum_{r=1}^{p-1} \varepsilon_r^2 + (2-\lambda_p) h_p^2 - 2h_p h_{p+1}$$
$$\geqslant \frac{1}{N_0} \sum_{r=1}^{p-1} h_r^2 + \sum_{r=1}^{p-1} \varepsilon_r^2 + \left(2 - \frac{2p-2}{2p-1}\right) h_p^2 - 2h_p h_{p+1}$$

$$\text{or } \left(2 - \frac{2p-2}{2p-1} - \frac{1}{N_0}\right) h_p^2 - 2 h_p h_{p+1}$$

$$= \left[\left(\frac{2pN_0 - 2p+1}{N_0(2p-1)}\right)^{1/2} h_p - \left(\frac{N_0(2p-1)}{2pN_0 - 2p+1}\right)^{1/2} h_{p+1}\right]^2 - \lambda_{p+1} h_{p+1}^2$$

avec $\lambda_{p+1} = \dfrac{N_0\,(2p-1)}{2pN_0 - 2p+1} < \dfrac{2p}{2p+1} < 1$

dès que $N_0 > 4p^2 - 2p$

donc $\displaystyle\sum_{r=1}^{p} E_r^r \geq \frac{1}{N_0} \sum_{r=1}^{p} h_r^2 + \sum_{r=1}^{p} E_r^2 - \frac{2p}{2p+1} h_{p+1}^2$

Toutes les mailles du domaine peuvent être prises en compte de cette façon puisqu'on a supposé (caractère (5) du maillage) qu'il existe au moins 2 segments consécutifs de Dirichlet. Si ($LMAX$) est le nombre de segments de type Dirichlet on peut attribuer à chaque chaine de mailles partant d'un de ces segments $p = \dfrac{KMAX}{LMAX}$ mailles.

or $\dfrac{\alpha_2}{k} \leq \dfrac{\rho}{k^2} \dfrac{mes(\Omega)}{mes(\Gamma)} \leq \dfrac{KMAX}{LMAX} \leq \dfrac{mes(\Omega)}{mes(\Gamma)} \dfrac{k}{\rho^2} \leq \dfrac{\alpha_1}{\rho}$, α_1, α_2 indépendant s de k.

Donc la condition $N_0 > 4p^2 - 2p$

est satisfaite si l'on prend $N_0 = \dfrac{4\alpha_1^2}{k^2}$

i.e. $\dfrac{1}{N_0} = c\,k^2$ avec c constante positive indépendante de k

d'où $E_I = \displaystyle\sum_{L=1}^{LMAX} \sum_{i=1}^{p} E_L^i \geq \frac{1}{N_0} \sum_{K=1}^{KMAX} h_K^2 + \sum_{L,i} (E_L^i)^2$

donc $E \geq c\,k^2 \displaystyle\sum_{K=1}^{KMAX} h_K^2 \geq c' |h_k|^2_{L^2(\Omega)}$, c' constante positive indépendante de k .

<u>Proposition 5.2</u>

(Sous les hypothèses de la propositiin 5.1. les solutions h_k du problème approché (5.1) restent bornées dans $L^2(\Omega)$

on a $c\,|h_k|_{L^2(\Omega)} \leq |f|_{L^2(\Omega)}$

avec $c>0$ constante indépendante de k

<u>démonstration.</u>

En écrivant (5.1) on a :

$E = \int_\Omega h_k \operatorname{div} \vec{Q}_k \, dx = \int_\Omega f h_k \, dx$

donc d'après la proposition 5.1 on a :

$$c\,|h_k|^2_{L^2(\Omega)} \leq E = \int_\Omega f h_k \, dx \leq |f|_{L^2(\Omega)} |h_k|_{L^2(\Omega)}$$

<u>remarque</u>

On peut étendre les résultats des propositions (5.1) et (5.2) au cas d'un

maillage quelconque en respectant la condition 5.5 et une condition affirmant que $A_{K,i}$ est peu différent de $(-A_{K',i})$ qui sont des conditions de faible déformation du maillage par rapport à un maillage de parallélogrammes égaux

Proposition 5.3

(Sous les hypothèses de la proposition 5.1 les solutions $\vec{Q}_h$ du problème approché (5.1) restent bornées dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$

(on a $|\vec{Q}_h|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\,|\rho|_{L^2(\Omega)}$

démonstration.

on a $k_h(Q_h,\psi) - \int h_h \operatorname{div}\psi\,dx = 0 \quad , \quad \forall \psi \in W_h$

prenant $\psi = Q_h$ on a $k_h(Q_h,Q_h) = \int_\Omega h_h \operatorname{div} Q_h\,dx = \int_\Omega h_h \rho\,dx$

$$\Longrightarrow k_h(Q_h,Q_h) \leq |h_h|_{L^2(\Omega)}\,|\rho|_{L^2(\Omega)} \leq c\,|\rho|^2_{L^2(\Omega)}$$

donc $|q_h|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \leq c\,|\rho|^2_{L^2(\Omega)}$ d'après la proposition 4.2.

6. Résolution numérique du problème approché

L'élimination de Q entre les équations (4.24)-(4.27) conduit à la résolution du système :

$$(6.1)\quad \left(A^1K^{-1}\,{}^TA^1 + A^2K^{-1}\,{}^TA^2\right)\{h_k\} + \left(A^1K^{-1}\,{}^TB^1 + A^2K^{-1}\,{}^TB^2\right)\{h_k^c\} = \{S^1\} - A^1K^{-1}\{S^3\} - A^2K^{-1}\{S^4\}$$

$$(6.2)\quad \left(B^1K^{-1}\,{}^TA^1 + B^2K^{-1}\,{}^TA^2\right)\{h_k\} + \left(B^1K^{-1}\,{}^TB^1 + B^2K^{-1}\,{}^TB^2\right)\{h_k^c\} = \{S^2\} - B^1K^{-1}\{S^3\} - B^2K^{-1}\{S^4\}$$

ce qu'on peut écrire encore:

$$(6.3)\quad \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ B^1 & B^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^TA^1 & {}^TB_1 \\ {}^TA^2 & {}^TB_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}$$

avec
$$\Pi_1 = \{S^1\} - A^1K^{-1}\{S^3\} - A^2K^{-1}\{S^4\}$$
$$\Pi_2 = \{S^2\} - B^1K^{-1}\{S^3\} - B^2K^{-1}\{S^4\}$$

ou encore

$$(6.4)\quad \mathbb{D}\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^T\mathbb{D}\begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbb{D} = \begin{pmatrix} A^1 & A^2 \\ B^1 & B^2 \end{pmatrix},\ \mathbb{K}^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}$$

on a vu que cette matrice est définie positive puisque

$$({}^Th_k, {}^Th_k^c)\ \mathbb{D}\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^T\mathbb{D}\begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix} \geqslant c\left\|{}^T\mathbb{D}\begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix}\right\|^2$$

avec c un nombre positif (Kert une matrice diagonale à coefficients positifs)

et puisque ,écrire que ${}^T\mathbb{D}\begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} h_k \\ h_k^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c'est exactement affirmer la condition de compatibilité 3.1 entre les éléments.

$\mathbb{D}\,\mathbb{K}^{-1}\,{}^T\mathbb{D}$ est une matrice symétrique définie positive , on peut donc lui appliquer une méthode itérative d'inversion de type Gauss-Siedel ou surrelaxation (avec coefficient de surrelaxtion ω compris entre 0 et 2).

On a exprimé localement cette méthode ce qui permet de ne jamais assembler cette matrice;ayant numéroté tous les éléments (mailles ou segments-frontières) on définit à l'itération $\nu+1$

$$(6.5)\quad Q_{1,i}^{\nu}(K) = \frac{1}{K_i}\left[\sum_L A_{L,i}^1\, h_L^{\nu}(K) + \sum_L B_{L,i}^1\, h_L^{c\,\nu}(K)\right] + \frac{1}{K_i}\, S_{3,i}$$

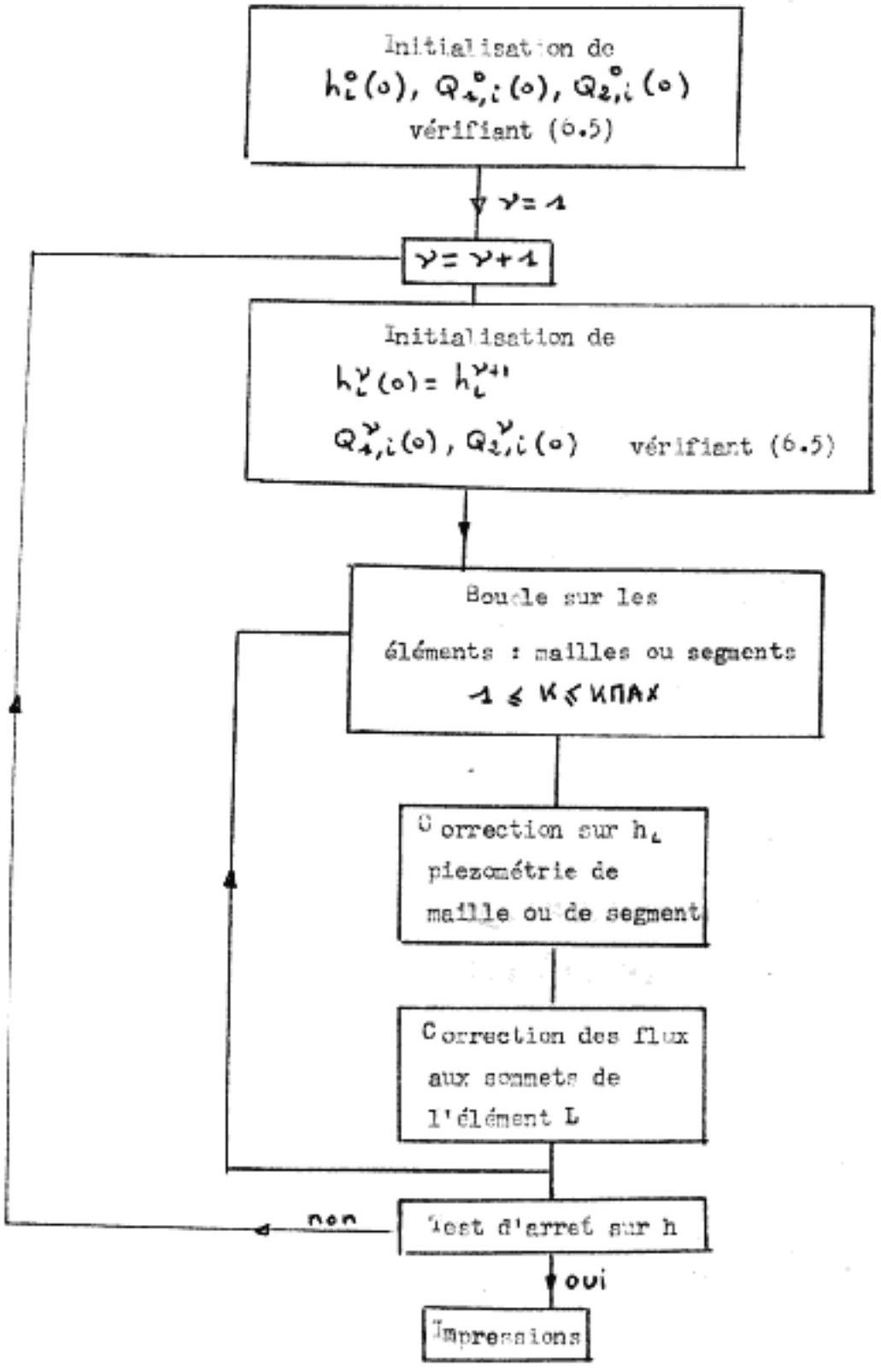
où $h_L^{\nu}(K) = \begin{cases} h_L^{\nu+1} & \text{si } L < K \\ h_L^{\nu} & \text{si } L \geq K \end{cases}$, $h_L^{c\,\nu}(K) = \begin{cases} h_L^{c\,\nu+1} & \text{si } L < K \\ h_L^{c\,\nu} & \text{si } L \geq K \end{cases}$

et de même $Q_{2,i}^{\nu}(K) = \frac{1}{K_i}\left[\sum_L A_{L,i}^2\, h_L^{\nu}(K) + \sum_L B_{L,i}^2\, h_L^{c\,\nu}(K)\right] + \frac{1}{K_i} S_{4,i}$

les équations du type

$$\sum_i A_{K,i}^1\, Q_{1,i}^{\nu}(K) + A_{K,i}^2\, Q_{2,i}^{\nu}(K) = (S^1)_K + \left[\sum_i \frac{(A_{K,i}^1)^2 + (A_{K,i}^2)^2}{K_i}\right](h_K^{\nu} - h_K^{\nu+1})$$

permettent de retrouver la correction necessaire à faire sur h à la $\nu+1^e$ itération .


Initialisation de
$h_L^0(0)$, $Q_{1,i}^0(0)$, $Q_{2,i}^0(0)$
vérifiant (6.5)
$\nu = 1$
$\nu = \nu + 1$
Initialisation de
$h_L^\nu(0) = h_L^{\nu+1}$
$Q_{1,i}^\nu(0)$, $Q_{2,i}^\nu(0)$ vérifiant (6.5)
Boucle sur les
éléments : mailles ou segments
$1 \leq K \leq KMAX$
Correction sur h_L
piezométrie de
maille ou de segment
Correction des flux
aux sommets de
l'élément L
non
Test d'arret sur h
oui
Impressions

7.- Résultats numériques

On a testé le programme sur le problème suivant:

$$\Omega =]0,1[\times]0, 0.25[$$

(7.1) $\operatorname{div} \vec{Q} = \sin \pi x_1$ dans Ω

(7.2) $\frac{1}{T} \vec{Q} + \overrightarrow{\operatorname{grad}\, h} = 0$ dans Ω

(7.3) $\vec{Q} \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall x_1 \in]0,1[$ en $x_2 = 0$ et $x_2 = 1$

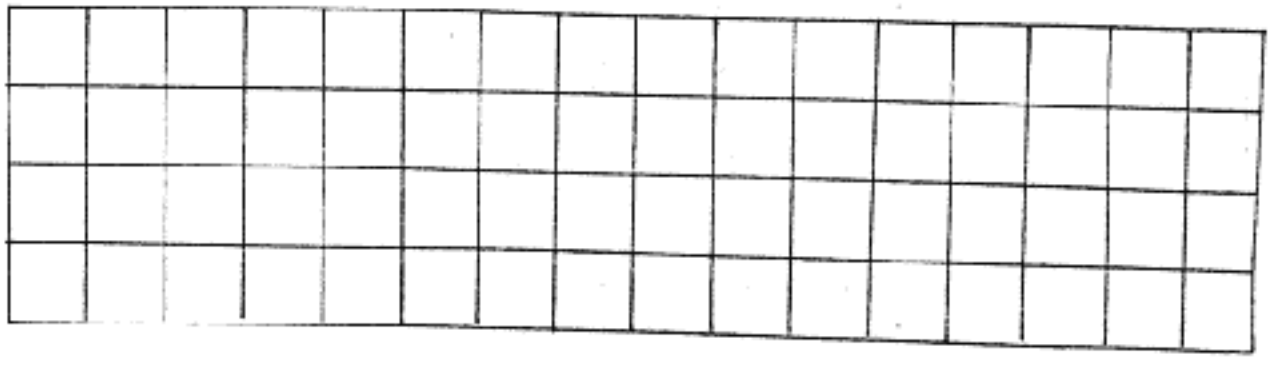
(7.4) $h(0, x_2) = 0$
$h(1, x_2) = 1 \quad , \forall x_2 \in]0, 0.25[$

avec $T = 10^{-2}$

La solution est alors $h(x_1, x_2) = \frac{100}{\pi^2} \sin(\pi x_1) + x_1$

$$Q_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x_1) - 0,01$$
$$Q_2(x_1, x_2) = 0.$$

Le pas d'espace a été pris égal à 0.0625 - Le maillage se présente donc de la facon suivante:



Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau ci-dessous ou les piézométries sont calculées aux abcisses $(x_i)_{i=1,15}$, les flux aux abcisses $a_1(x_i + 0.03125)_{i=1,16}$

résultats / abcisses x_i	piézométries calculées	piézométries réelles	erreur relative	flux de mélange calculé	flux de mélange réel	erreur relative
.03125	1.027	1.024	3.10^{-3}	-.3288	-.3283	$1.5\ 10^{-3}$
.09375	3.044	3.035	3.10^{-3}	-.3227	-.3222	$1.5\ 10^{-3}$
.15625	4.948	4.933	3.10^{-3}	-.3046	-.3041	$1.6\ 10^{-3}$
.21875	6.667	6.647	3.10^{-3}	-.2751	-.2747	$1.5\ 10^{-3}$
.28125	8.139	8.114	$3.1\ 10^{-3}$	-.2354	-.2351	$1.3\ 10^{-3}$
.34375	9.306	9.280	3.10^{-3}	-.1871	-.1868	$1.6\ 10^{-3}$
.40625	10.133	10.102	3.10^{-3}	-.1320	-.1318	$1.5\ 10^{-3}$
.46875	10.566	10.552	3.10^{-3}	-.0722	-.0721	$1.4\ 10^{-3}$
.53125	10.647	10.615	3.10^{-3}	-.0100	-.0100	$1.7\ 10^{-3}$
.59375	10.321	10.290	3.10^{-3}	-.0522	-.0521	$1.9\ 10^{-3}$
.65625	9.621	9.592	3.10^{-3}	.1120	.1118	$1.8\ 10^{-3}$
.71875	8.576	8.551	$2.9\ 10^{-3}$	.1671	.1668	$1.8\ 10^{-3}$
.78125	7.230	7.209	$2.9\ 10^{-3}$	.2154	.2151	$1.4\ 10^{-3}$
.84375	5.635	5.620	$2.7\ 10^{-3}$	.2551	.2547	$1.6\ 10^{-3}$
.90625	3.857	3.847	$2.6\ 10^{-3}$	.2846	.2841	$1.7\ 10^{-3}$
.96875	1.966	1.962	$1.5\ 10^{-3}$	.3027	.3022	$1.6\ 10^{-3}$
				.3088	.3083	$1.6\ 10^{-3}$

On retrouve bien sûr $Q_2 = 0$ et aucune variation de valeurs sur une verticale n'apparait, que ce soit pour les piézométries ou pour les flux.

On a défini l'erreur relative par :

$$E = \frac{|h_R(i) - h(i)|}{|h(i)|} \quad \text{pour } h$$

$$E = \frac{|Q_R^1(i) - Q_R^1(i)|}{|Q(i)|} \quad \text{pour } Q$$

Le tableau montre que les erreurs relatives sur les flux sont inférieures aux erreurs relatives sur les piézométries ; c'est un résultat qui était attendu.

La méthode d'inversion de la matrice nécessite un assez grand nombre d'itérations. L'exemple cité précédement a nécessité 110 itérations pour un coefficient de sur-relaxation pris égal à 1.8 et un test d'arrêt itération défini par

$$\sup_k \left| h_k^{Y} - h_k^{Y+1} \right| < 10^{-6}$$

On a effectué d'autres tests pour d'autres solutions analytiques définies par les équations :

$$-\Delta h = x$$

$$-\Delta h = \delta(x - x_0) - \delta(x - x_1)$$

$$x_0, x_1 \in [0, 1]$$

Les résultats ont confirmé la fiabilité de la méthode, ceux obtenus sur les flux étant toujours meilleurs à ceux obtenus sur les piézométries.

III - ETUDE DU PROBLEME DU TRANSPORT DE LA SUBSTANCE

1 - Position du problème

On rappelle que le problème est de trouver ω fonction scalaire de $Q - \Omega \times (0,T)$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{J}$ fonction de Q dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant les équations :

(1.1) $b\phi \frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{Q}.\overrightarrow{\text{grad}}\,\omega + \text{div}\,\vec{J} = i_e(\omega_e - \omega) + i_v(\omega_v - \omega)$

(1.2) $\frac{1}{b\phi}\,\overline{\overline{D}}^{-1}(\vec{Q}).\vec{J} + \text{grad}\,\omega = 0$

dans le domaine Q et :

(1.3) $\omega = \omega_s$ sur $\Gamma_1 \times (0,T)$

(1.4) $\vec{J}.\vec{n} = J_s$ sur $\Gamma_2 \times (0,T)$

avec $J_s = 0$ si $\vec{Q}.\vec{n} \geq 0$

$J_s = q_s(\omega_s - \omega)$ si $\vec{Q}.\vec{n} < 0$

(1.5) $\vec{J}.\vec{n} = \lambda_s\,\vec{Q}.\vec{n}\,(\omega - \omega_s)$ sur $\Gamma_3 \times (0,T)$

(1.6) $\omega(0) = \omega_0$ sur Ω

Le coefficient $\vec{Q}$ intervenant dans les équations est le flux du mélange qui est la solution du problème étudié dans le chapitre II dont l'énoncé était le suivant :

(1.7) $\text{div}\,\vec{Q} = i_e + i_v - i_s$ dans Ω

(1.8) $\vec{Q} = -T\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h$ dans Ω

(1.9) $h = h_s$ sur Γ_1

(1.10) $\vec{Q}\cdot\vec{n} = q_s$ sur Γ_2

(1.11) $\vec{Q}\cdot\vec{n} = c_s\,(h - h_s^3)$ sur Γ_3

ou i_e, i_v et i_s sont des fonctions positives
on notera par la suite $g = i_e + i_v$ et $f = i_e\omega_e + i_v\omega_v$

Les conditions aux limites (1.4) et (1.5) peuvent être regroupées sous une même formulation du type (1.5)

(1.5)' $\vec{J}\cdot\vec{n} = \lambda_s\,\vec{Q}\cdot\vec{n}\,(\omega - \omega_s)$ sur $\Gamma_2' = (\Gamma_2 \cup \Gamma_3) \times (0,T)$

ou λ_s est défini sur Γ_2 par :

$$\lambda_s = \frac{1}{2\,\vec{Q}\cdot\vec{n}}\left(|\vec{Q}\cdot\vec{n}| - \vec{Q}\cdot\vec{n}\right)$$

Dans la suite les hypothèses regroupées sous le libellé $(\mathcal{H}_{II})$ seront toujours supposées satisfaites. Ce sont :

$(\mathcal{H}_{II})$

* les hypothèses sur le domaine Ω faites dans $(\mathcal{H}_I)$ restent satisfaites
* $b\phi$ fonction uniquement des coordonnées d'espace $\in C^0(\bar{\Omega})$ et $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\beta \leq b\phi \leq \alpha$ dans Ω
* $f, g \in H^1(Q)$
* $\lambda_s \in C^0(\bar{\Gamma}_2')$ et $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que
  $0 \leq \lambda_s\,\vec{Q}\cdot\vec{n} \leq \alpha$ p.p. dans $\Gamma_2' \times (0,T)$
* $\vec{Q} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega;\gamma_\nu,\Gamma) \cap C^0(\bar{\Omega})$ et $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que les composantes Q_i de $\vec{Q}$ et la trace normale $\vec{Q}\cdot\vec{n}$ vérifient :
  $|Q_i| \leq \alpha$ dans Ω
  $|\vec{Q}\cdot\vec{n}| \leq \alpha$ sur Γ

* $\bar{\bar{D}}(\vec{Q}^*)$ est un tenseur de fini positif de coefficient général $a_{ij}(\vec{Q}^*) \in C^0(\bar{\Omega})$, $\forall i,j = 1,2$ vérifiant :

$\exists \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \beta \left(\sum_{i=1}^{2} \xi_i^2\right)$

dans $\bar{\Omega}$ et $\forall \xi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$

$\exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $|a_{ij}| \leq \alpha$, $\forall i,j = 1,2$ dans $\bar{\Omega}$

Il en est de même pour son inverse $\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}^*)$ de terme général $\alpha_{ij}(\vec{Q}^*)$

On montrera que sous les hypothèses ($\mathcal{H}_{II}$) et si la condition (c) suivante est réalisée le problème est bien posé. Cette condition porte sur les termes d'échange.

$$(c) \quad \left[\begin{array}{ll} 2g - \operatorname{div} \vec{Q}^* \geq 0 & \text{p.p. dans } \Omega \\ (1 + 2\lambda_s)\, \vec{Q}^* \cdot \vec{n}^* \geq 0 & \text{p.p. sur } \Gamma_2 \end{array} \right.$$

La signification physique de ces deux conditions est que à tout débit d'échange en mélange doit être associé un débit d'échange en polluant produit du premier par une fraction de masse pondérée entre la fraction de masse intérieure ω et une fraction de masse extérieure le coefficient de pondération étant au moins égal à I/2 .

On a vu que la première condition est réalisée puisque

$$2g - \operatorname{div} \vec{Q}^* = 2(i_e + i_v) - (i_e + i_v - i_s) = i_e + i_v + i_s$$

qui est positif.

La deuxième est remplie par le type de coefficients λ_s qui sont choisis sur ce type de limites (semi-perméables).

Nous allons considérer le problème avec conditions aux limites homogènes i.e. $\omega_s = 0$ et $\omega_0 = 0$.

(1.1) - (1.6) peut s'écrire sous la forme d'un système du premier ordre, symétrique et positif au sens de Friedrichs [13] [14] :

$$\begin{pmatrix} b\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \omega \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{2} \begin{pmatrix} Q_i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix} \omega \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{b\phi}\begin{pmatrix} g\,b\phi & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où Q_i et J_i , $i = 1,2$ sont les composantes de $\vec{Q}$ et $\vec{J}$ on définit l'opérateur A par

$$A\vec{U} = A_t \frac{\partial}{\partial t}\vec{U} + \sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\vec{U} + A_0 \vec{U}$$

Les matrices A_i, $i = 0,2$, A_t sont définies dans Ω symétriques et continues en $x \in \bar{\Omega}$. Leurs coefficients sont bornés.

<u>Positivité de A</u>

soit $C = A_0 + A_0^* - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \frac{\partial A_t}{\partial t}$

où A_0^* est l'adjoint de A_0 ;

$$C = \begin{pmatrix} 2g - \operatorname{div}\vec{Q} , & 0 , & 0 \\ 0 , & & \\ 0 , & \frac{1}{b\phi}\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}) & \end{pmatrix}$$

et $(C\vec{U}.\vec{U}) = (2g - \operatorname{div}\vec{Q})\,\omega^2 + \frac{1}{b\phi}\vec{J}.\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}).\vec{J}$

$\geqslant (2g - \operatorname{div}\vec{Q})\,\omega^2 + \beta|\vec{J}|^2$

où $\vec{U} = \begin{pmatrix} \omega \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$

La condition (C) assure $(C\vec{U},\vec{U}) \geqslant 0$

remarque : cette condition de positivité est une condition de positivité au sens large si $i_v = i_e = i_s = 0$.

Dans ce cas, la changement de variable $\omega = e^{\lambda t}\omega_1, \lambda > 0$ nous conduit à un système de Friedrichs

$$A_t \frac{\partial}{\partial t}(\vec{U}_1) + \sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial x_i} + A_0 \vec{U}_1 + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $U_1 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vec{J} \end{pmatrix}$, dans lequel la condition de positivité est stricte.

Conditions aux limites

on définit $B = \sum A_i n_i$, n_i composante de la normale extérieure sur la frontière de Q. On a :

$$B(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{Q}.\vec{n} & , n_1 & , n_2 \\ n_1 & , 0 & , 0 \\ n_2 & , 0 & , 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Gamma \times (0,T)$$

$$B(x,0) = \begin{pmatrix} -b\phi & , 0 & , 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Omega$$

$$B(x,T) = \begin{pmatrix} b\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Omega$$

On peut alors écrire les conditions initiales et aux limites (2.3) - (2.6) sous la formulation générale :

$$(B - \Pi)\begin{pmatrix} \omega \\ J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En définissant M comme suit :

$$\Pi(x,T) = \Pi(x,0) = \begin{pmatrix} h\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Pi(x,t) = \begin{pmatrix} |\vec{Q}\cdot\vec{n}| , & n_1, & n_2 \\ -n_1 , & 0 , & 0 \\ -n_2 , & 0 , & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Gamma_1 \times (0,T)$$

$$\Pi(x,t) = \begin{pmatrix} (1+2\lambda_3)\,\vec{Q}\cdot\vec{n} , & -n_1 , & -n_2 \\ n_1 , & 0 , & 0 \\ n_2 , & 0 , & 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \Gamma_2 \times (0,T)$$

Les matrices M vérifient :

* $\Pi(x,t)$ est continue par morceaux $\forall (x,t) \in \partial Q$
* $\Pi + \Pi^* \geq 0$ sur ∂Q

dans le cas où $x \in \Gamma_2$ cela est dû à la condition (C)

$$(1+2\lambda_3)\,\vec{Q}\cdot\vec{n} \geq 0$$

* $\mathrm{Ker}(B-\Pi) + \mathrm{Ker}(B+\Pi) = \mathbb{R}^3$

et on voit que :

$$(B-\Pi)\begin{pmatrix}\omega \\ \vec{J}\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2\omega\,\vec{Q}\cdot\vec{n} = 0 \\ 2\omega\, n_x = 0 \\ 2\omega\, n_y = 0 \end{cases} \quad (\text{si } \vec{Q}\cdot\vec{n} \leq 0) \iff \omega = 0$$

$$x \in \Gamma_1 \times (0,T) \iff \begin{cases} 2\omega\, n_x = 0 \\ 2\omega\, n_y = 0 \end{cases} \quad (\text{si } \vec{Q}\cdot\vec{n} > 0) \iff \omega = 0$$

$$(B-\Pi)\begin{pmatrix}\omega \\ \vec{J}\end{pmatrix} = 0 \iff 2\,(\vec{J}\cdot\vec{n} - \lambda_3\,\omega\,\vec{Q}\cdot\vec{n}) = 0$$

$x \in \Gamma_2 \times (0,T)$

$$(B-\Pi)\begin{pmatrix}\omega\\ \vec{J}\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{pour } x \in \Omega \quad t = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\ell b \not\omega(0) = 0$$

ce qui permet de retrouver la condition initiale

$$(B-\Pi)\begin{pmatrix}\omega\\ \vec{J}\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{pour } x \in \Omega, \ t = T$$

ne donne aucune condition au temps t = T

On voit donc que le problème peut dans tous les cas s'écrire sous la forme d'un système de Friedrichs du premier ordre, symétrique et positif :

$$(1.12) \qquad A\vec{U} = \vec{F}$$
$$(1.13) \qquad (B-\Pi)\vec{U} = 0$$

Il existe différents théorèmes donnant l'existence d'une solution forte selon les hypothèses faites sur la frontière ∂Q le second membre F et les matrices B et M qu'on trouvera dans K.O. FRIEDRICHS [13 , pp 377-384] , LAX et PHILLIPS [15, pp 440 - 444] et le théorème cité plus bas dans PHILLIPS et SARASON [16 , p 241]

On définit une solution forte de (1.12) - (1.13) par l'existence d'une suite de fonctions u_j de $\mathbb{H}^1(Q)$ satisfaisant les conditions aux limites et telles que

$$\lim_{j \to \infty} \left(|u_j - u|_{\mathbb{L}^2(Q)} + |Au_j - F|_{\mathbb{L}^2(Q)} \right) = 0$$

De telles solutions fortes ,si elles existent sont solutions de problèmes plus faibles comme (1.14)-(1.16) ou (1.17),(1.20)-(1.22).

On a le théorème suivant :

<u>théorème 1.1.</u> [16]

(On suppose que la frontière est de classe C^2 par morceaux. Alors
(pour tout $\vec{F} \in \mathbb{H}^1(Q)$ le problème (1.12) - (1.13) admet une
(solution forte unique appartenant à $\mathbb{H}^1(Q)$

On considère le problème suivant :

trouver $\vec{U} \in \mathbb{H}^1(Q)$, $\vec{U} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{J} \end{pmatrix}$ vérifiant :

(1.14) $$(A\vec{U}, \vec{V})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} ((\Pi - B)\vec{U}, \vec{V})\, d\sigma = (\vec{F}, \vec{V})_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \quad , \forall \vec{V} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$$

(1.15) $$\int_{\Gamma_2} ((B - \Pi)\vec{U}, \vec{V})\, d\sigma = 0 \quad , \forall \vec{V} \in \mathbb{L}^2(\Gamma_2)$$

(1.16) $(B - \Pi)\vec{U} = 0$ sur Ω en $t = 0$ et $t = T$

ce qu'on peut écrire de manière équivalente en explicitant (1.14) - (1.16) :

trouver $\vec{U} \in \mathbb{H}^1(Q)$, $\vec{U} = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{J} \end{pmatrix}$ vérifiant :

(1.17) $$\int_\Omega b\phi\, \omega' \frac{\partial \omega}{\partial t} + \int_\Omega \omega' \operatorname{div} \vec{J}\, dx + \int_\Omega \omega' \vec{Q}.\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega\, dx + \int_\Omega g\omega\omega' dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \omega'(|\vec{Q}.\vec{n}| - \vec{Q}.\vec{n})\omega\, d\sigma = \int_\Omega f\omega'\, dx \quad , \quad \forall \omega' \in H^1(\Omega)$$

(1.18) $$\int_\Omega \frac{1}{\omega\phi} \vec{\psi}.\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}).\vec{J}\, dx + \int_\Omega \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega.\vec{\psi}\, dx - \int_{\Gamma_1} \omega\, \vec{\psi}.\vec{n}\, d\sigma = 0 \quad , \forall \vec{\psi} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$$

(1.19) $$-\int_{\Gamma_2} \omega'(\vec{J}.\vec{n} - \lambda_s \omega\, \vec{Q}.\vec{n})\, d\sigma = 0 \quad , \forall \omega' \in L^2(\Gamma_2)$$

(1.20) $\omega(0) = 0$

Nous travaillerons par la suite sur le problème suivant :

trouver $\begin{pmatrix} \omega \\ \vec{J} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1(Q)$ et $\omega^c \in L^2(\Gamma_2)$ p.p. t

vérifiant :

(1.17), (1.20) et

$$(1.21) \quad \int_\Omega \frac{1}{b\varphi} \vec{\psi}^\circ . \bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}^\circ).\vec{J}\, dx - \int_\Omega \omega \operatorname{div} \vec{\psi}^\circ dx + \int_{\Gamma_2} \omega^c \vec{\psi}^\circ . \vec{n}^\circ d\sigma = 0$$

$$, \forall \vec{\psi}^\circ \in \mathbb{H}^1(\Omega)$$

$$(1.22) \quad - \int_{\Gamma_2} \omega^{c'} (\vec{J}^\circ . \vec{n}^\circ - \lambda_s \omega^c \vec{Q}^\circ . \vec{n}^\circ)\, d\sigma = 0, \quad \forall \omega^{c'} \in L^2(\Gamma_2)$$

(1.17), (1.20) (1.22) est équivalent à (1.17) - (1.20)

En effet, en prenant $\omega^c = \gamma_0 \omega$ sur Γ_2 on obtient (1.21) et (1.22)

Inversement, en écrivant (1.21) pour des $\vec{\psi}$ vérifiant

$$\operatorname{div} \vec{\psi}^\circ = 0 \quad \text{sur } \Omega$$
$$\vec{\psi}^\circ . \vec{n}^\circ = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

d'après la proposition II-2-2 on a p.p.t :

$$\frac{1}{b\varphi} \bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q}^\circ).\vec{J} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p \quad \text{où } p \in H^1(\Omega)$$
$$\text{et } p = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

donc (1.21) s'écrit :

$$- \int_\Omega \vec{\psi}^\circ . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p\, dx - \int_\Omega \omega \operatorname{div} \psi\, dx + \int_{\Gamma_2} \omega^c \vec{\psi}^\circ . n\, d\sigma = 0$$

ou encore en appliquant la formule de Green :

$$\int_\Omega (p - \omega) \operatorname{div} \psi\, dx + \int_{\Gamma_2} (\omega^c - p)\, \vec{\psi}^\circ . \vec{n}^\circ d\sigma = 0$$

et en prenant ψ solution de

$$\operatorname{div} \psi = p - \omega$$
$$\vec{\psi}^\circ . \vec{n}^\circ = \omega^c - p \quad \text{sur } \Gamma_2$$

(Il en existe : il suffit de prendre $\psi = \operatorname{grad} w$, $w \in H^2(\Omega)$
avec $\vec{\psi} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\operatorname{mes}(\Gamma_1)} \left[\int_\Omega (p-\omega)\, dx - \int_{\Gamma_2} (\omega^c - p)\, d\sigma \right]$)

on obtient :

$$\int_\Omega (p-\omega)^2\, dx + \int_{\Gamma_2} (\omega^c - p)^2\, d\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \quad p = \omega \quad \text{dans } \Omega$$
$$p = \omega^c \quad \text{sur } \Gamma_2$$

donc $\omega^c = \omega$ sur Γ_2 ce qui entraîne que (1.21) - (1.22) est équivalent à (1.18) (1.15)

∎

Nous allons montrer qu'on peut appliquer le principe du maximum au problème (1.1) - (1.6).

<u>proposition 1.2</u>

(Si ω est une solution classique (i.e. $\in \mathcal{C}^2(\bar{Q})$)
(du problème (1.1) - (1.6) où il existe ω max, une constante telle
(que :
($\max \sup_{x,t} (\omega_e, \omega_v, \omega_s, \omega_o) \leq \omega_{max}$
(et ω_{min} , une constante telle
(que :
($\min \inf_{x,t} (\omega_c, \omega_v, \omega_s, \omega_o) \geq \omega_{min}$
(alors $\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max}$

<u>démonstration</u>

en éliminant $\vec{J}$ entre (1.1) et (1.2) on obtient

(1.23) $b\phi \frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_i Q_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + (i_c + i_v)\omega = i_c \omega_e + i_v \omega_v$

soit $v = \omega - \omega_{max}$

on définit $v^+ = \begin{cases} v & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{si } v < 0 \end{cases}$

On multiplie scalairement (1.23) par v^+ dans $L^2(Q)$ et on intègre par parties :

$$(1.24)\quad \int_Q \frac{1}{2} b\phi \left(v^+ \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v^+}{\partial t}\right) dx\, dt + \sum_{i,j} \int_Q a_{ij} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx\, dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_Q \sum_i Q_i \left(v^+ \frac{\partial v}{\partial x_i} - v \frac{\partial v^+}{\partial x_i}\right) dx\, dt + \int_Q v v^+ \left(g - \frac{1}{2} \operatorname{div} \vec{Q}\right) dx\, dt$$

$$+ \left[\int_\Omega \frac{1}{2} b\phi v v^+ dx \right]_0^T + \int_{\Gamma_1 \times (0,T)} v^+ \left(-\overline{\overline{D}}(\vec{Q}) . \overrightarrow{\operatorname{grad}} v . \vec{n} + \frac{1}{2} v \vec{Q} . \vec{n}\right)$$

$$= \int_Q (i_e \omega_e + i_v \omega_v - g \omega_{max}) v^+ dx\, dt$$

Or, en utilisant la définition de v^+ et les hypothèses de la proposition, on a

$$\int_Q b\phi \left(v^+ \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v^+}{\partial t}\right) dx\, dt = 0$$

$$\int_Q \sum_i Q_i \left(v^+ \frac{\partial v}{\partial x_i} - v \frac{\partial v^+}{\partial x_i}\right) dx\, dt = 0$$

$$\int_\Omega \frac{1}{2} b\phi v v^+ dx = \frac{1}{2} \int_\Omega b\phi (\omega_0 - \omega_{max}) v^+ dx \leq 0$$

en $t = 0$

$$\int_{\Gamma_1 \times (0,T)} v^+ \left(-\overline{\overline{D}}(\vec{Q}) . \overrightarrow{\operatorname{grad}} v . \vec{n} + \frac{1}{2} v \vec{Q} . \vec{n}\right) d\sigma\, dt$$

$$= \int_{\Gamma_1 \times (0,T)} (\omega_s - \omega_{max})^+ \left(-\overline{\overline{D}}(\vec{Q}) . \overrightarrow{\operatorname{grad}} v . \vec{n} + \frac{1}{2} v \vec{Q} . \vec{n}\right) d\sigma\, dt$$

$$= 0$$

$$\int_Q (i_e \omega_e + i_v \omega_v - g \omega_{max}) v^+ dx\, dt$$

$$= \int_Q (i_e \omega_e + i_v \omega_v - (i_e + i_v) \omega_{max}) v^+ dx\, dt \leq 0$$

$$\int_{\Gamma_2 \times (0,T)} v^+ \left(- \overline{\overline{D}}(\vec{Q}) \, \overrightarrow{\mathrm{grad}\, v} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2} v \vec{Q} \cdot \vec{n} \right) d\sigma \, dt$$

$$= \int_{\Gamma_2 \times (0,T)} \left(\lambda_s + \frac{1}{2}\right) \vec{Q} \cdot \vec{n} \, v v^+ \, d\sigma \, dt$$

$$+ \int_{\Gamma_2 \times (0,T)} (\omega_{max} - \omega_s) \lambda_s \vec{Q} \cdot \vec{n} \, v^+ \, d\sigma \, dt$$

avec : $\int_{\Gamma_2} (\omega_{max} - \omega_s) \lambda_s \vec{Q} \cdot \vec{n} \, v^+ \, d\sigma \, dt \geq 0$

puisque $\lambda_s \vec{Q} \cdot \vec{n} \geq 0$, $\omega_s \leq \omega_{max}$

$$\sum_{i,j} \int_Q a_{ij} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx \, dt = \sum_{i,j} \int_Q a_{ij} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \frac{\partial v^+}{\partial x_j} \, dx \, dt$$

donc (1.24) donne

$$(1.25) \quad \sum_{i,j} \int_Q a_{ij} \frac{\partial v^+}{\partial x_i} \frac{\partial v^+}{\partial x_j} \, dx \, dt + \int_Q (v^+)^2 \left(g - \frac{1}{2} \mathrm{div}\, \vec{Q}\right) dx \, dt$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Omega b \varphi \, (v^+(T))^2 \, dx + \int_{\Gamma_2 \times (0,T)} \left(\lambda_s + \frac{1}{2}\right) \vec{Q} \cdot \vec{n} \, (v^+)^2 \, d\sigma \, dt \leq 0$$

; en utilisant le caractère défini positif de $\overline{\overline{D}}(\vec{Q})$
et la condition (C) sur les termes d'échange :

$$g - \frac{1}{2} \mathrm{div}\, \vec{Q} \geq 0$$

$$\left(\lambda_s + \frac{1}{2}\right) \vec{Q} \cdot \vec{n} \geq 0$$

on peut conclure que $(v^+(T))^2 = 0$ $\quad (\mathrm{grad}\, v^+)^2 = 0$

donc $v^+ = 0$ partout dans Q

$$\Longrightarrow \quad \omega \leq \omega_{max}$$

on opére de la même façon en posant

$$v = -\omega + \omega_{min}$$

et on trouve de la même façon $\omega_{min} \leq \omega$ ∎

2 - Le problème approché

On définit le problème approché pour un maillage spatial identique à celui défini en $\mathrm{II}\cdot 3$.

Soit K une maille du domaine de frontière $\partial K = \bigcup_{K'=1}^{4} \partial KK'$ où $\partial KK'$ est la partie de ∂K commune à la maille K et à la maille K' .

Soient

$$\partial \overset{+}{K}K' = \{ x \in \partial KK' \text{ où } \vec{Q}\cdot\vec{n}_K > 0 \}$$

$$\partial \overset{-}{K}K' = \{ x \in \partial KK' \text{ où } \vec{Q}\cdot\vec{n}_K < 0 \}$$

$$\partial \overset{\circ}{K}K' = \{ x \in \partial KK' \text{ où } \vec{Q}\cdot\vec{n}_K = 0 \}$$

Soit V_K^* la fonction définie pour $0 \leq \alpha \leq 1$ par :

$$V_K^*(x) \left| \begin{array}{ll} = 1 & \text{si } x \text{ appartient à l'intérieur de } K \\ & \text{ou si } x \in \partial KK' \cap \Gamma^+ \\ = \frac{1+\alpha}{2} & \text{si } x \in \partial \overset{+}{K}K' \setminus \Gamma \\ = \frac{1-\alpha}{2} & \text{si } x \in \partial \overset{-}{K}K' \setminus \Gamma \\ = \frac{1}{2} & \text{si } x \in \partial \overset{\circ}{K}K' \setminus \Gamma \\ = 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

On définit alors l'espace V_h^* destiné à approcher les fractions de masse ω par :

$$V_h^* = \{ v_h = \sum_K v_K \, V_K^* \; ; v_h \in L^2(\Omega) ; v_K = \text{constantes} \}$$

L'espace W_h des fonctions approchant les flux dispersifs $\vec{J}$ est défini comme W_h en $\mathrm{II}-3$ (ce sont des éléments isoparamétriques de degré 1).

V_h^c espace des fonctions approximant les fractions de masse de contour sur Γ_2 est défini comme en $\mathrm{II}\cdot 3$ (fonctions constantes sur chacun des segments frontières de Γ_2)

On subdivise l'intervalle de temps $(0,T)$ en N intervalles de temps Δt.

On définit alors le problème approché :

ayant défini $(\omega_h^0, \omega_h^{c\,0})$ par les projections sur V_h^* et V_h^c et V_h^c de ω_0 et ω_0^c, et $f^m(x) = f(x, m\Delta t)$

trouver $\forall m = 1, \dots, N \quad (\omega_h^m, \omega_h^{c\,m}, J_h^{m-1/2})$

vérifiant :

$$(2.1) \quad \int_\Omega v_h^* b\phi \frac{(\omega_h^m - \omega_h^{m-1})}{\Delta t} dx + \int_\Omega v_h^* \operatorname{div} J_h^{m-1/2} dx$$
$$+ T_K\left(\frac{\omega_h^m + \omega_h^{m-1}}{2}, v_h^*\right) + \int_\Omega g\, v_h^* \left(\frac{\omega_h^m + \omega_h^{m-1}}{2}\right) dx$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{f^m + f^{m-1}}{2}\right) v_h^* \, dx, \quad \forall v_h^* \in V_h^*$$

$$(2.2) \quad \int_\Omega \frac{\overline{\overline{D}}^{-1}(\vec{Q})}{b\phi} \vec{J}_h \cdot \vec{\psi} \, dx - \int_\Omega \left(\frac{\omega_h^m + \omega_h^{m-1}}{2}\right) \operatorname{div} \vec{\psi} \, dx$$
$$\forall \vec{\psi} \in W_h, \qquad + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\omega_h^{c\,m} + \omega_h^{c\,m-1}}{2}\right) \vec{\psi} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

$$(2.3) \quad - \int_{\Gamma_2} v_h^c \left(\vec{J}_h \cdot \vec{n} - \lambda_s \vec{Q} \cdot \vec{n} \left(\frac{\omega_h^{c\,m} + \omega_h^{c\,m-1}}{2}\right)\right) d\sigma$$
$$, \forall v_h^c \in V_h^c$$

où $T_K(\omega_h^m, v_h^*)$ discrétise le terme de transport.

On a :

$$(2.4) \quad T_K(\omega_h^m, v_h^*) = - \sum_K \left[\sum_{K'=1}^{4} (\omega_{int}^m - \omega_{ext}^m) \left[\int_{\partial \bar{K}K'} \vec{Q} \cdot \vec{n}_K \, d\sigma \frac{(1+\alpha)}{2} + \left(\int_{\partial KK'} \vec{Q} \cdot \vec{n}_K \, d\sigma \right) \frac{(1-\alpha)}{2} \right] \right.$$

avec $\alpha = 1$ sur Γ , α fixé ailleurs $(0 \leq \alpha \leq 1)$

où K' désigne une maille adjacente à K .

On pose pour la suite $\omega^{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\omega^m + \omega^{m-1})$

$$f^{m-1/2} = \frac{1}{2}(f^m + f^{m-1})$$

et avec
$$\omega_{int}^{m}(\partial KK') = \omega_K^m$$
$$\omega_{ext}^{m}(\partial KK') = \omega_{K'}^m \quad \text{si } \partial KK' \not\subset \Gamma$$
$$= \omega_{K'}^{c,m} \quad \text{si } \partial KK' \subset \Gamma_2$$
$$= 0 \quad \text{si } \partial KK' \subset \Gamma_1$$

Cette discrétisation consiste à introduire des dérivations discrètes décentrées dans le sens du courant. Les sauts dans (2.4) expriment la présence d'une masse de Dirac aux interfaces, due à la discontinuité des éléments représentant ω. Le décentrage est contrôlé par le coefficient α.
La discrétisation en temps est du type Crank-Nicholson.
En utilisant les mêmes notations que dans le chapitre II on peut écrire de manière équivalente à (2.1) :

$$(2.5)\quad \frac{\omega_K^m - \omega_K^{m-1}}{\Delta t}\int_K b\phi\, dx + \int_K \operatorname{div} J_k^{m-1/2}\, dx$$
$$- \sum_{K'=1}^{4} \left(\omega_{int}^{m-1/2} - \omega_{ext}^{m-1/2}\right)\left[\frac{(1+\alpha)}{2}\left(\int_{\partial K^- K'} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(1-\alpha)}{2}\left(\int_{\partial K^+ K'} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\right)\right] + \omega_K^{m-1/2}\int_K g\, dx$$
$$= \int_K f^{m-1/2}\, dx$$

$, \forall \quad K$ maille du domaine .

ou encore :

$$(2.6)\quad \frac{M_K}{\Delta t}\left(\omega_K^m - \omega_K^{m-1}\right) + \sum_{i=1}^{4}\left(A_{K,i}^1 J_1^{m-1/2}(i) + A_{K,i}^2 J_2^{m-1/2}(i)\right)$$
$$- \sum_{K'=1}^{4}\left(\omega_{int}^{m-1/2} - \omega_{ext}^{m-1/2}\right)\left[\frac{(1+\alpha)}{2} T_{KK'}^- + \frac{(1-\alpha)}{2} T_{KK'}^+\right]$$
$$+ \omega_K^{m-1/2} P_K = \int_K f^{m-1/2}\, dx$$
$$, P_K = \int_K g\, dx \quad , \quad T_{KK'}^{\pm} = \int_{\partial^{\pm} KK'} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma$$

le flux de mélange $\vec{Q}$ est approximé de la même façon que $\vec{J}$.

Dans (2.2) on utilise la même formule d'intégration numérique qu'au chapitre II pour intégrer

$$\int_\Omega \frac{\overline{\overline{D}}^{-1}}{b\phi} \vec{J}_k^{m-1/2} \cdot \vec{\psi}\, dx \qquad \text{à savoir} \qquad \int_K f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{4} \int_K f(i)\, \ell_i\, dx$$

où les ℓ_i sont les fonctions de base de W_k.
En écrivant (2.2) pour tout $\vec{\psi} = (\ell_i, 0)$ ou $(0, \ell_i)$
on obtient de manière équivalente :

$$(2.7)\quad K_i\, J_1^{m-1/2}(i) - \sum_{K'=1}^{4} \omega_{K'}^{m-\frac{1}{2}} \left(\alpha_{11}(i)\, A_{K',i}^{1} + \alpha_{12}(i)\, A_{K',i}^{2} \right) - \sum_{L=1}^{2} \omega_L^{m-\frac{1}{2}} \left(\alpha_{11}(i)\, B_{L,i}^{1} + \alpha_{12}(i)\, B_{L,i}^{2} \right) = 0$$

$$(2.8)\quad K_i\, J_2^{m-1/2}(i) - \sum_{K'=1}^{4} \omega_{K'}^{m-1/2} \left(\alpha_{21}(i)\, A_{K',i}^{1} + \alpha_{22}(i)\, A_{K',i}^{2} \right) - \sum_{L=1}^{2} \omega_L^{m-1/2} \left(\alpha_{21}(i)\, B_{L,i}^{1} + \alpha_{22}(i)\, B_{L,i}^{2} \right)$$

$, \forall i$ noeuds du domaine.

où $\alpha_{k,\ell}(i)$, $k, \ell = 1, 2$ sont les coefficients de $\overline{\overline{D}}(\vec{Q})(i)$
En écrivant (2.3) pour tout fonction caractéristique de segments frontières de Γ_2, on obtient :

$$(2.9)\quad \sum_{L=1}^{2} \left[\left(B_{L,i}^{1}\, J_1^{m-1/2} + B_{L,i}^{2}\, J_2^{m-1/2} \right) - R_L\, \omega_L^{m-1/2} \right] = 0$$

<u>Le schéma de discrétisation est conservatif</u>

Les échanges sur une interface $\partial KK'$ dus au terme de transport s'écrivent :

$$-(\omega_K - \omega_{K'}) \left[\frac{(1+\alpha)}{2} \int_{\partial KK'_-} \vec{Q} \cdot \vec{n_K}\, d\sigma + \frac{(1-\alpha)}{2} \int_{\partial KK'_+} \vec{Q} \cdot \vec{n_K}\, d\sigma \right]$$
$$-(\omega_{K'} - \omega_K) \left[\frac{(1+\alpha)}{2} \int_{\partial K'K_-} \vec{Q} \cdot \vec{n_{K'}}\, d\sigma + \frac{(1-\alpha)}{2} \int_{\partial K'K_+} \vec{Q} \cdot \vec{n_{K'}}\, d\sigma \right]$$

Soit en prenant une orientation commune pour les normales sur $\partial KK'$:

$$(\omega_{K'}-\omega_K)\left[\frac{(1+\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_-}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma+\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_+}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma\right]$$

$$+(\omega_{K'}-\omega_K)\left[\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_-}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma+\frac{(1+\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_+}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma\right]$$

$$=(\omega_{K'}-\omega_K)\left[\int_{\partial KK'_-}\vec{Q}.\vec{n_K}+\int_{\partial KK'_+}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma\right]$$

$$=-(\omega_K-\omega_{K'})\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma$$

$$=-\left[\omega_K\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}+\omega_{K'}\int_{\partial K'K}\vec{Q}.\vec{n_{K'}}\,d\sigma\right]$$

Les échanges sur la frontière s'écrivent :

$$-\int_{\Gamma_1^-}\omega_k\,\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma-\int_{\Gamma_2^-}(\omega_k-\omega_k^c)\,\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma$$

Alors, en sommant (2.5) sur toutes les mailles on obtient :

$$\int_\Omega\frac{b\phi}{\Delta t}(\omega_k^m-\omega_k^{m-1})\,dx+\int_\Gamma\vec{J}_k^{m-1/2}.\vec{n}\,d\sigma$$
$$-\int_\Omega\omega_k^{m-1/2}\,\mathrm{div}\,\vec{Q}\,dx+\int_{\Gamma_1^+}\omega_k^{m-1/2}\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma$$
$$+\int_{\Gamma_2^+}\omega_k^{m-1/2}\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma+\int_{\Gamma_2^-}\omega_k^{c\,m-1/2}\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma$$
$$+\int_\Omega g\,\omega_k^{m-1/2}\,dx=\int_\Omega i_e\,\omega_e^{m-1/2}+i_v\,\omega_v^{m-1/2}\,dx$$

or $g=\mathrm{div}\,\vec{Q}-i_s$

d'où :

$$\int_\Omega b\phi\frac{(\omega_k^m-\omega_k^{m-1})}{\Delta t}\,dx+\int_\Gamma J_k^{m-1/2}.\vec{n}\,d\sigma+\int_{\Gamma_+}\omega_k^{m-1/2}\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma$$
$$+\int_{\Gamma_2^-}\omega_k^{c\,m-1/2}\,\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma=\int_\Omega(i_e\,\omega_e^{m-\frac{1}{2}}+i_v\,\omega_v^{m-\frac{1}{2}}-i_s\,\omega_k^{m-1/2})$$

<u>Le schéma de discrétisation est stable</u> ($\forall \alpha$ tel que $0 \leq \alpha \leq 1$)

En écrivant (2.1) -(2.3) pour $v_k^* = \omega_k^{m-1/2}$,

$$\vec{\psi}^{\circ} = J_k^{m-1/2} \quad , \quad v_k^c = \omega_k^{c\,m-1/2}$$

et en sommant les trois équations on obtient :

$$(2.10) \int_\Omega \frac{b\phi}{2\Delta t}\left[(\omega_k^m)^2 - (\omega_k^{m-1})^2\right] dx + \int_\Omega \frac{\overline{\overline{D}}^{-1}(\vec{Q}^{\circ})}{b\phi} \vec{J}_k^{m-1/2} \cdot J_k^{m-1/2}\, dx$$

$$+ \int_{\Gamma_2} \lambda_s \vec{Q}^{\circ}\cdot\vec{n}\,(\omega_k^{c\,m-1/2})^2\, d\sigma$$

$$+ T_K(\omega_k^{m-1/2}, \omega_k^{m-1/2}) + \int_\Omega g\,(\omega_k^{m-1/2})^2\, dx$$

$$= \int_\Omega f^{m-1/2}\, \omega_k^{m-1/2}\, dx$$

avec
$$T_K(\omega_k^{m-1/2}, \omega_k^{m-1/2}) = -\sum_K \Big[\Big[\frac{(1+\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_-} \omega_K^{m-1/2}\, \vec{Q}^{\circ}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma$$
$$+ \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{\partial KK'_+} (\omega_K^{m-1/2})\, \vec{Q}^{\circ}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\Big]\,(\omega_{int}^{m-1/2} - \omega_{ext}^{m-1/2})\Big]$$

En écrivant tous les termes intervenant sur une interface $\partial KK'$ d'éléments non incluse dans la frontière, on a

$$-\omega_K^{m-1/2}(\omega_K^{m-1/2} - \omega_{K'}^{m-1/2})\Big[\Big(\int_{\partial KK'_-} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\Big)\frac{(1+\alpha)}{2} + \Big(\int_{\partial KK'_+} \vec{Q}\cdot n_K\, d\sigma\Big)\frac{(1-\alpha)}{2}\Big]$$
$$-\omega_{K'}^{m-1/2}(\omega_{K'}^{m-\frac{1}{2}} - \omega_K^{m-1/2})\Big[\Big(\int_{\partial K'K_-} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\Big)\frac{(1+\alpha)}{2} + \Big(\int_{\partial K'K_+} \vec{Q}\cdot\vec{n}_K\, d\sigma\Big)\frac{(1-\alpha)}{2}\Big]$$

ou en orientant la normale à $\partial KK'$ de la même façon sur chaque maille :

$$\left(\omega_K^{m-1/2}\omega_{K'}^{m-1/2} - (\omega_K^{m-1/2})^2\right)\left[\frac{(1+\alpha)}{2}\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma + \frac{1-\alpha}{2}\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma\right]$$

$$-\left(\omega_K^{m-\frac{1}{2}}\omega_{K'}^{m-1/2} - (\omega_{K'}^{m-\frac{1}{2}})^2\right)\left[\frac{(1-\alpha)}{2}\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma + \frac{(1-\alpha)}{2}\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(\omega_K^{m-1/2})^2 - (\omega_{K'}^{m-1/2})^2\right]\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma - \alpha\left(\int_{\partial KK'}|\vec{Q}.\vec{n_K}|\,d\sigma\right)\omega_K^{m-1/2}\omega_{K'}^{m-\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left[(\omega_K^{m-1/2})^2 + (\omega_{K'}^{m-1/2})^2\right]\int_{\partial KK'}|\vec{Q}.\vec{n_K}|\,d\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}(\omega_K^{m-1/2})^2\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma + \frac{1}{2}(\omega_{K'}^{m-1/2})^2\int_{\partial KK'}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma$$

$$+\frac{\alpha}{2}\left(\int_{\partial KK'}|\vec{Q}.\vec{n_K}|\,d\sigma\right)(\omega_K^{m-1/2} - \omega_{K'}^{m-1/2})^2$$

Par ailleurs les termes de bord s'écrivent :

$$-\int_{\Gamma_1^-}(\omega_k^{m-\frac{1}{2}})^2\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma - \int_{\Gamma_2^-}\omega_k^{m-\frac{1}{2}}(\omega_k^{m-1/2} - \omega_k^{c\,m-1/2})\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma.$$

Donc le terme de transport s'écrit :

$$T_K = -\sum_K\int_{\partial K}\frac{(\omega_K^{m-\frac{1}{2}})^2}{2}\vec{Q}.\vec{n_K}\,d\sigma + \int_\Gamma\frac{(\omega_k^{m-1/2})^2}{2}|\vec{Q}.\vec{n}|\,d\sigma + \int_{\Gamma_2^-}\omega_k^{m-1/2}\omega_k^{c,m-1/2}\vec{Q}.\vec{n}$$

+ des termes positifs

Le terme $\int_\Omega g(\omega_k^{m-1/2})^2\,dx$ s'écrit puisque $g = \operatorname{div}\vec{Q} + i_s$
$= i_e + i_v$

$$\frac{1}{2}\sum_K\int_{\partial K}\vec{Q}.\vec{n_K}(\omega_K^{m-1/2})^2\,d\sigma + \int_\Omega\frac{1}{2}(i_e + i_v + 2i_s)(\omega_k^{m-1/2})^2\,dx$$

Donc (2.10) s'écrit en définitive :

$$(2.11)\quad \int_\Omega\frac{b\varnothing}{2\Delta t}\left((\omega_k^{m-1})^2 - (\omega_k^m)^2\right)dx + \int_\Omega\frac{\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q})}{b\varnothing}|\vec{J}_k^{m-1/2}|^2\,dx + \int_{\Gamma_1^-}\frac{(\omega_k^{m-1/2})^2}{2}|\vec{Q}.\vec{n}|\,d\sigma$$

$$-\int_{\Gamma_2^-}\frac{(\omega_k^{m-1/2} - \omega_k^{c,m-1/2})^2}{2}\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma - \int_{\Gamma_2^-}(\omega_k^{c,m-1/2})^2\vec{Q}.\vec{n}\left(\lambda_s + \frac{1}{2}\right)d\sigma$$

$$+\int_{\Gamma_2^+}\left[\frac{(\omega_k^{m-1/2})^2}{2} + \lambda_s(\omega_k^{c\,m-1/2})^2\right]\vec{Q}.\vec{n}\,d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Omega(g + 2i_s)(\omega_k^{m-1/2})^2\,dx$$

+ des termes positifs $= S^{m-1/2}$

avec $S^{m-1/2} = \int_\Omega f^{m-1/2}\, \omega_k^{m-1/2}\, dx$

puisque :

$$\int_{\Gamma_2^-} \left[(\omega_k^{m-1/2})^2 - 2\omega_k^{m-1/2}\omega_k^{c\,m-1/2} \right] \vec{Q}^p . \vec{n}^p \, d\sigma$$
$$= \int_{\Gamma_2^-} \left[(\omega_k^{m-1/2} - \omega_k^{c\,m-1/2})^2 - (\omega_k^{c\,m-1/2})^2 \right] \vec{Q}^p . \vec{n}^p \, d\sigma$$

Ces résultats permettent de montrer à la fois l'existence et l'unicité de la solution du problème approché, et la stabilité de ces solutions.
En effet concernant l'existence et l'unicité on remarque que (2.1) - (2.3) est équivalent à un système linéaire de M équations à M inconnues (M = nombre de noeuds + nombre de mailles + nombre de segments frontières de Γ_2). Il suffit donc de montrer l'unicité *i.e.* que la solution nulle est l'unique solution du problème homogène.
En écrivant (2.11) homogène on obtient :

$$(2.12)\quad \frac{1}{2\Delta t}\int_\Omega b\phi\, |\omega_k^m|^2 dx + \int_\Omega \frac{\bar{\bar{D}}^{-1}(\vec{Q})}{b\phi} |J_k^{m-1/2}|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} (\omega_k^{m-1/2})^2 |\vec{Q}.\vec{n}^p| d\sigma$$
$$- \int_{\Gamma_2^-} \frac{1}{2}(\omega_k^{m-\frac{1}{2}} - \omega_k^{c,m-\frac{1}{2}})^2 \vec{Q}^p.\vec{n}^p d\sigma - \int_{\Gamma_2^-} (\omega_k^{c,m-\frac{1}{2}})^2 (\lambda_s + \tfrac{1}{2}) \vec{Q}^p.\vec{n}^p d\sigma$$
$$+ \int_{\Gamma_2^+} \left[\frac{(\omega_k^{m-1/2})^2}{2} + \lambda_s (\omega_k^{c\,m-1/2})^2 \right] \vec{Q}^p.\vec{n}^p d\sigma + \frac{1}{2}\int_\Omega (g + 2is)(\omega_k^{m-1/2})^2 dx$$
$$+ \text{ des termes positifs} = 0$$

d'où : $\exists\, c > 0$ tel que :

$$c\left[|\omega_k^m|^2 + |J_k^{m-1/2}|^2 \right] \leq 0$$

puisque $i_e, i_v, i_s \geq 0$, $(\lambda_s + \frac{1}{2})\, \vec{Q}^p.\vec{n}^p \geq 0$

qui entraine $\omega_k^m = 0$, $J_k^{m-1/2} = 0$

On remarquera qu'en fait la régularité du système ne tient pas à la présence du terme d'évolution ni du terme $\int_\Omega (g + 2is)\, \omega_k^2\, dx$.

En effet même en l'absence de ces termes (2.12) conduit à $J^{m-1/2} = 0$ et alors en écrivant (2.2) homogène on obtient :

$$-\int_\Omega \omega_k^m \operatorname{div} \psi \, dx + \int_{\Gamma_2} \omega_k^{c\,m} \vec{\psi}.\vec{n} = 0 \ , \ \forall \psi \in W_k$$

qui entraine, d'après la condition de compatibilité étudiée au chapitre II (3.1)

$$\omega_k^m = 0 \ , \ \omega_k^{c,m} = 0$$

Concernant la stabilité des solutions on va montrer que les solutions restent bornées dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ pour ω_k^m

et $L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$ pour $J^{m-1/2}$.

<u>Démonstration</u>

En sommant (2.11) pour $m = 1, \dots p$, $1 \leq p \leq N$

on obtient :

$$(2.13) \int_\Omega b\phi \, (\omega_k^p)^2 dx + 2\Delta t \sum_{m=1}^{p} \int_\Omega \frac{\overline{D}^{-1}}{b\phi} |\vec{J}_k^{m-1/2}|^2 dx$$

$$+ 2\Delta t \sum_{m=1}^{p} \int_\Omega (\omega_k^{m-1/2})^2 i_s \, dx + \Delta t \sum_{m=1}^{p} \int_\Omega \left[(\omega_k^{m-1/2})^2 - 2\omega_k^{m-1/2} \omega_e^{m-1/2} \right] i_e \, dx$$

$$+ 2\Delta t \sum_{m=1}^{p} \int_\Omega \frac{1}{2} \left[(\omega_k^{m-1/2})^2 - 2\omega_k^{m-1/2} \omega_v^{m-1/2} \right] i_v \, dx$$

$$+ \text{ des termes positifs } = \int_\Omega b\phi (\omega_k^0)^2 dx$$

cela entraine : $\exists \, c > 0$

$$|\omega_k^p|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \sum_{m=1}^{p} |J_k^{m-1/2}|^2 \leq c \Big[\int_\Omega b\phi (\omega_k^0)^2 dx - \sum_{m=1}^{p} \int_\Omega \left(i_v (\omega_v^{m-1/2})^2 + i_e (\omega_e^{m-1/2})^2 \right) dx \Big]$$

donc ω_k est borné dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$

avec $p = N$ on obtient :

J_k est borné dans $L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\Omega))$

3. Résultats numériques.

- Premier test -

On a d'abord testé le programme sur le problème suivant :

$$(3.1)\quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} + \vec{Q}.\overrightarrow{\operatorname{grad}\,\omega} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)$$

$$(3.2)\quad \vec{J} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\omega \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T)$$

$$(3.3)\quad \vec{J}.\vec{n} = 0 \qquad \text{pour } x_2 \in \{0, 0.25\},\ \forall x_1,\ \forall t$$

$$(3.4)\quad \omega(0, x_2, t) = t\left(\frac{t}{2} + 1\right),\ \forall t,\ \forall x_2$$

$$(3.5)\quad \omega(1, x_2, t) = \frac{1}{2}(t+1)^2,\ \forall t,\ \forall x_2$$

$$(3.6)\quad \omega(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{2} x_1^2,\ \forall x_2$$

pour (x_1, x_2, t) appartenant au domaine

$$\Omega \times (0,T) = (]0,1[\times]0, 0.25[\ ) \times]0,1[$$

La solution de ce problème est : pour $\vec{Q} = (1,0)$

$$\omega(x_1, x_2, t) = t + \frac{1}{2}(x_1 - t)^2,\ \forall x_2$$

$$J_1(x_1, x_2, t) = t - x_1,\ \forall x_2$$

$$J_2(x_1, x_2, t) = 0,\ \forall x_1,\ \forall x_2,\ \forall t$$

Le maillage du domaine spatial est constitué de carrés égaux dont les longueurs de côté sont égales à 0.0625. Le pas de temps est pris égal à 0.025.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux qui suivent. Si les fractions de masse ω sont calculées aux abscisses $(x_i)_{i=1,16}$, les flux dispersifs J le sont aux abscisses o et $(x_i + 0.03125)_{i=1,16}$.

On trouvera les résultats pour différentes valeurs du coefficient α contrôlant le décentrage des dérivations discrètes représentant le terme de transport.

FRACTIONS DE MASSE ω AU 5ème PAS DE TEMPS			
abscisses	ω réel	ω calculé ($\alpha = 0$)	ω calculé ($\alpha = 1$)
. 03125	. 1294	. 1288	. 1290
. 09375	. 1255	. 1251	. 1259
. 15625	. 1255	. 1251	. 1264
. 21875	. 1294	. 1291	. 1307
. 28125	. 1372	. 1369	. 1389
. 34375	. 1489	. 1487	. 1509
. 40625	. 1640	. 1644	. 1667
. 46875	. 1841	. 1840	. 1864
. 53125	. 2075	. 2075	. 2099
. 59375	. 2349	. 2349	. 2372
. 65625	. 2661	. 2662	. 2683
. 71875	. 3013	. 3014	. 3033
. 78125	. 3403	. 3405	. 3420
. 84375	. 3833	. 3835	. 3846
. 90625	. 4302	. 4304	. 4309
. 96875	. 4810	. 4814	. 4808

FLUX DISPERSIFS $\vec{J}$ AU 5ème PAS DE TEMPS			
abscisses	J réel	J calculé ($\alpha = 0$)	J calculé ($\alpha = 1$)
. 0	. 1250	. 1277	. 1207
. 0625	- . 0625	. 0597	. 0510
. 1250	0 . 0000	- . 0065	- . 0082
. 1875	- . 0625	- . 0630	- . 0694
. 2500	- . 1250	- . 1257	- . 1308
. 3125	- . 1875	- . 1883	- . 1921
. 3750	- . 2500	- . 2509	- . 2534
. 4375	- . 3125	- . 3134	- . 3147
. 5000	- . 3750	- . 3759	- . 3759
. 5625	- . 4375	- . 4384	- . 4370
. 6250	- . 5000	- . 5009	- . 4981
. 6875	- . 5625	- . 5634	- . 5590
. 7500	- . 6250	- . 6259	- . 6199
. 8125	- . 6875	- . 6882	- . 6807
. 8750	- . 7500	- . 7508	- . 7410
. 9375	- . 8125	- . 8154	- . 7990
1 . 0000	- . 8750	- . 8453	- . 8640

FRACTIONS DE MASSE ω AU 35ème PAS DE TEMPS			
abscisses	ω réel	ω calculé ($\alpha = 0$)	ω calculé ($\alpha = 1$)
. 03125	1 . 2310	1 . 2305	1 . 2301
. 09375	1 . 1802	1 . 1797	1 . 1801
. 15625	1 . 1333	1 . 1328	1 . 1339
. 21875	1 . 0903	1 . 0899	1 . 0915
. 28125	1 . 0513	1 . 0508	1 . 0530
. 34375	1 . 0161	1 . 0157	1 . 0183
. 40625	. 9849	. 9845	. 9874
. 46875	. 9575	. 9571	. 9603
. 53125	. 9341	. 9337	. 9369
. 59375	. 9146	. 9142	. 9174
. 65625	. 8989	. 8986	. 9017
. 71875	. 8872	. 8868	. 8897
. 78125	. 8794	. 8790	. 8815
. 84375	. 8755	. 8751	. 8771
. 90625	. 8755	. 8751	. 8764
. 96875	. 8794	. 8790	. 8794

FLUX DISPERSIFS $\vec{J}$ AU 35ème PAS DE TEMPS			
abscisses	J réel	J calculé ($\alpha = 0$)	J calculé ($\alpha = 1$)
. 0	. 8750	. 8746	. 8876
. 0625	. 8125	. 8123	. 8001
. 1250	. 7500	. 7498	. 7389
. 1875	. 6875	. 6873	. 6777
. 2500	. 6250	. 6248	. 6166
. 3125	. 5625	. 5623	. 5555
. 3750	. 5000	. 4998	. 4946
. 4375	. 4375	. 4373	. 4338
. 5000	. 3750	. 3748	. 3730
. 5625	. 3125	. 3123	. 3124
. 6250	. 2500	. 2499	. 2519
. 6875	. 1875	. 1874	. 1915
. 7500	. 1250	. 1249	. 1312
. 8125	. 0625	. 0625	. 0711
. 8750	. 0000	. 0001	. 0110
. 9375	- . 0625	- . 0625	- . 0489
1 . 0000	- . 1250	- . 1210	- . 1085

- Deuxième test -

On définit la fonction impaire :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$$

et on définit :

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$$

On considère la fonction : pour $x_1 \geq 0$, $t > 0$

$$\omega^*(x_1, t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{erfc}\,(u(x_1,t)) + \exp(10^{-2} x_1)\,\mathrm{erfc}\,(v(x_1,t))\right]$$

où $u(x_1, t) = \dfrac{x_1 - 10^3 - 10^{-3} t}{2\sqrt{10^{-1} t + 10^5}}$, $v(x_1, t) = \dfrac{x_1 + 10^3 + 10^{-3} t}{2\sqrt{10^{-1} t + 10^5}}$

On pourra calculer erfc(u) en sachant (Abramovitz [19]) qu'on peut calculer erf(x), $x > 0$ à 10^{-7} près avec la formule

$$\mathrm{erf}(x) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_6 x^6)^{16}}$$

avec $a_1 = .0705230784$ $\quad a_4 = .0001520143$

$a_2 = .0422820123$ $\quad a_5 = .0002765672$

$a_3 = .0092705272$ $\quad a_6 = .0000430638$

On calculera $\exp(10^{-2} x_1)\,\mathrm{erfc}(v)$ à l'aide de la fraction continue $\frac{1}{x+}\ \frac{1/2}{x+}\ \frac{1}{x+}\ \frac{3/2}{x+} \ldots$ (Abramovitz [19]) qui permet d'obtenir $2\exp(x^2)\,\mathrm{erfc}\,(x)$ pour $x > 0$.

Ce test a été choisi parce qu'il a une signification physique précise. Il s'agit de la propagation d'un "front" de polluant dans une colonne semi-infinie.

La fonction $\omega^*(x_1,t)$ est solution $\forall x_2$ du problème suivant :

on définit

$$\Omega =]0, 10^4[\times]0, 1250[$$

Il s'agit donc d'une nappe de 10 km de long, ce qui constitue l'ordre de grandeur des nappes sur lesquelles on a à travailler généralement.

On définit :

$$A_L = 100\,m \;,\; A_T = 30\,m \;,\; Q_1 = 2\times10^{-3}\,m/s \;,\; Q_2 = 0$$

$$b\phi = 2\,m \;,\; \overline{\overline{D}}(\vec{Q}) = \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_T \end{pmatrix} \;,\; D_L = \frac{A_L\,|\vec{Q}|}{b\phi} \;,\; D_T = \frac{A_T\,|\vec{Q}|}{b\phi}$$

ω^* vérifie :

(3.7) $b\phi \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} + \vec{Q}.\overrightarrow{\operatorname{grad}\omega} = 0$ dans Ω , $t > 0$

(3.8) $\vec{J} = -\overline{\overline{D}}(\vec{Q}).\overrightarrow{\operatorname{grad}\omega}$ dans Ω , $t > 0$

(3.9) $\vec{J}.\vec{n} = 0$ pour $x_2 = 0$ et $x_2 = 1250$ $\forall x_1$, $t > 0$

(3.10) $\omega(0, x_2, t) = 1$, $\forall x_2$, $t > 0$

(3.11) $\omega(10^4, x_2, t) = \omega^*(10^4, t)$, $\forall x_2$, $t > 0$

(3.12) $\omega(x_1, x_2, 0) = \omega^*(x_1, 0)$, $\forall x_2$

Il s'agit donc d'un domaine tronqué par rapport au domaine où opère la fonction ω^* , une colonne semi-infinie ($x \geq 0$). D'où la condition de Dirichlet (3.11).

La maillage du domaine est constitué de carrés égaux dont les longueurs des côtés sont égales à .03125.

Le pas de temps est d'une demi-journée.

On pourra comparer les résultats du programme avec ceux de la solution analytique, calculés comme il a été dit précédemment, pour 3 semaines de simulation (42 pas de temps) de la propagation de ce "front", dans le tableau et les figures qui suivent. Des essais ont été effectués pour différentes valeurs du paramètre α . Il apparaît que le schéma est moins précis (plus "dispersif") quand α se rapproche de 1.

REPARTITION DES FRACTIONS DE MASSE ω
APRES 3 SEMAINES DE SIMULATION (Δt = .5 JOUR)

abscisses x_i	ω réel	ω calculé $\alpha = 0.$	ω calculé $\alpha = 1.$
156.25	1.000	1.000	.999
468.75	.999	1.000	.993
781.25	.997	1.000	.981
1093.75	.990	1.000	.958
1406.25	.971	0.987	.918
1718.75	.930	0.945	.857
2031.25	.855	.857	.773
2343.75	.739	.724	.671
2656.25	.589	.562	.555
2968.75	.423	.399	.437
3281.25	.271	.259	.326
3593.75	.152	.154	.230
3906.25	.074	.084	.154
4218.75	.031	.042	.097
4531.25	.011	.019	.058
4843.75	.004	.008	.033
5156.25	.001	.003	.018
5468.75	.000	.001	.009
5781.25	.000	.000	.004
6093.75	.000	.000	.002
x_i > 6093.75	.000	.000	.000

Répartition comparée des fractions de masse réelle et calculées après 3 semaines (42 pas de temps de .5 jour).

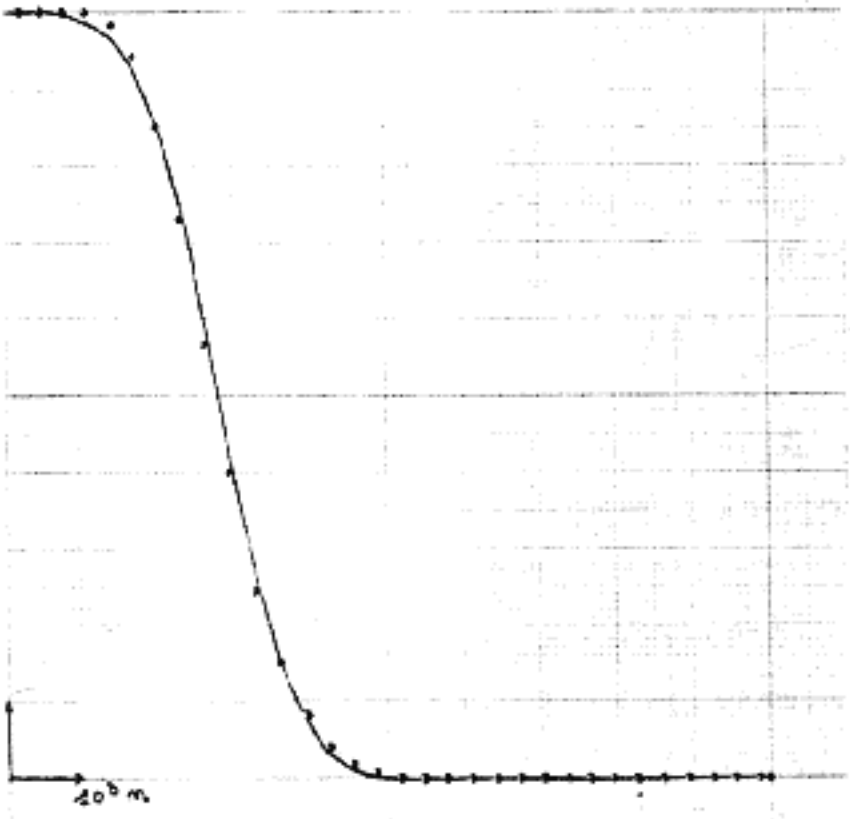


Schéma centré

(coefficient d'échange entre les mailles $\alpha = 0.$)

——— solution réelle

..... solution calculée

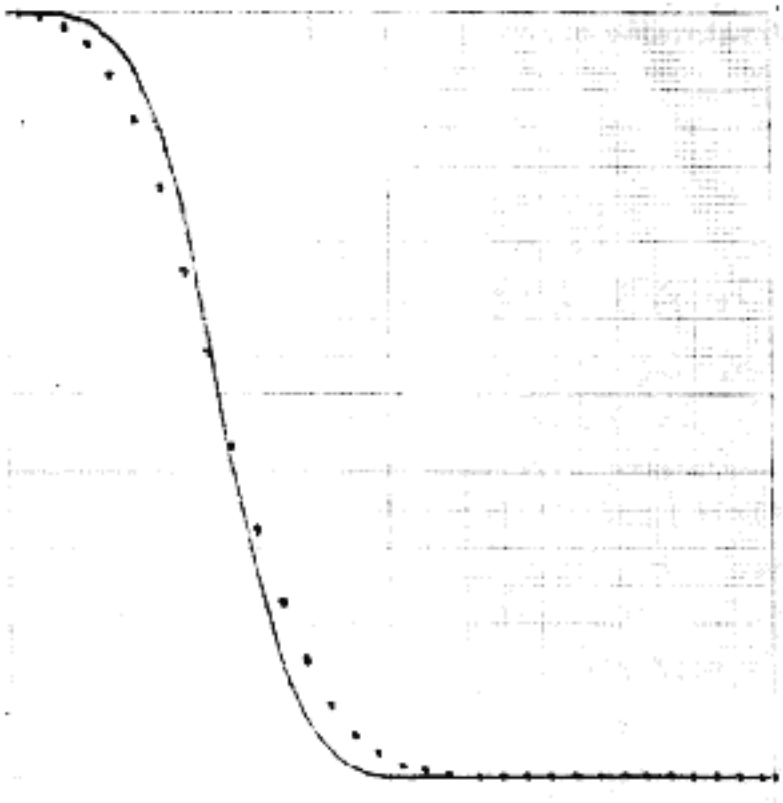
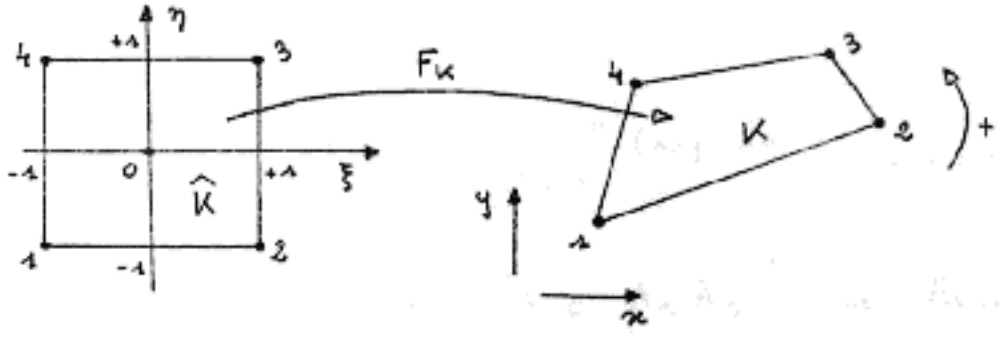


Schéma décentré complètement vers l'amont.

(coefficient d'échange entre les mailles $\alpha = 1.$)

ANNEXE (1) — <u>Calcul de coefficients</u>

Pour calculer les coefficients on se ramène à la maille de référence $\hat{K}$



Toute maille K étant image, par une application F_K, de $\hat{K}$.

on pose : $\ell_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$

$\ell_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$

$\ell_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$

$\ell_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

et $F_K(\xi,\eta) = (x,y)$ avec $x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, \ell_i(\xi,\eta)$

$y(\xi,\eta) = \sum_{i=4}^{4} y_i\, \ell_i(\xi,\eta)$

Soit $J_K = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$, le déterminant de la matrice jacobienne de F_K

on a : $J_K = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$ et en effectuant le calcul on obtient :

$$J_K = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, \ell_i(\xi,\eta)$$

avec $\lambda_1 = \frac{1}{4}\left[(x_2-x_4)(y_4-y_1)-(x_4-x_1)(y_2-y_4)\right]$, les autres λ_i étant obtenus par permutation circulaire sur les indices. Si on note A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets de la maille K pris dans le sens trigonométrique, on a

$$\lambda_k = \frac{1}{4}\,|A_k\overrightarrow{A_{k+1}}|\,|A_k\overrightarrow{A_{k-1}}|\,\sin(A_k\overrightarrow{A_{k+1}}, A_k\overrightarrow{A_{k-1}}),$$ k défini modulo 4.

De plus $J_K > 0$. En effet K étant un quadrilatère convexe,

$\sin(A_k\overrightarrow{A_{k+1}}, A_k\overrightarrow{A_{k-1}}) > 0$ et donc $\lambda_k > 0$

d'où : $|J_K| = J_K = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, \ell_i(\xi,\eta) > 0$

on en déduit un encadrement de J_K :

$$c_2 \rho_K^2 < J_K \leq c_1 h_K^2 \quad , c_1, c_2 \text{ constantes} > 0$$

Calcul de Π_K

$$\Pi_K = \int_K dx\,dy = \int_{\hat{K}} J_K(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$
$$= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \int_{\hat{K}} \ell_i(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \implies \Pi_K = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i$$

Calcul de $A^1_{K,i}$

$$A^1_{K,1} = \int_{\partial K} \ell_1(x,y)\,n_x\,d\sigma = \int_{\partial K} \ell_1(x,y)\,dy \quad \text{(intégrale curviligne)}$$

$\ell_1(x,y) \equiv 0$ sur les côtés A_2A_3 et A_3A_4 donc :

$$A^1_{K,1} = \int_{A_4}^{A_1} \ell_1(x,y)\,dy + \int_{A_1}^{A_2} \ell_1(x,y)\,dy$$

$$y = \frac{1}{2}\left(y_4(1+\eta) + y_1(1-\eta)\right) \quad \text{sur } A_4A_1$$
$$y = \frac{1}{2}\left(y_1(1-\xi) + y_2(1+\xi)\right) \quad \text{sur } A_1A_2$$
$$A^1_{K,1} = -\int_{-1}^{1} \frac{(1-\eta)}{2}\,\frac{y_4-y_1}{2}\,d\eta + \int_{-1}^{1} \frac{(1-\xi)}{2}\,\frac{y_2-y_1}{2}\,d\xi$$

$$\implies A^1_{K,1} = \frac{1}{2}(y_2 - y_4)$$

De la même façon :

$$A^1_{K,i} = \frac{1}{2}(y_{k+1} - y_{k-1}) \quad , k \text{ défini modulo } 4$$

Calcul de $A^2_{K,i}$

$$A^2_{K,1} = \int_{\partial K} \ell_1(x,y)\,n_y\,d\sigma = -\int_{\partial K} \ell_1(x,y)\,dx$$
$$= -\int_{A_4}^{A_1} \ell_1(x,y)\,dx - \int_{A_1}^{A_2} \ell_1(x,y)\,dx$$
$$x = \frac{1}{2}\left((1+\eta)x_4 + (1-\eta)x_1\right) \quad \text{sur } A_4A_1$$
$$x = \frac{1}{2}\left((1-\xi)x_1 + (1+\xi)x_2\right) \quad \text{sur } A_1A_2$$

d'où de la même façon : $A^2_{K,1} = \frac{1}{2}(x_4 - x_2)$

$$A^2_{K,i} = \frac{1}{2}(x_{k-1} - x_{k+1}) \quad , k \text{ modulo } 4$$

Calcul de $K_{K,i}$

$$K_{K,i} = \int_K \ell_i(x,y)\,dx\,dy = \int_{\hat{K}} \ell_i(\xi,\eta)\, J_K(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \int_{\hat{K}} \ell_i(\xi,\eta)\,\ell_j(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

or : $\int_{-1}^{1} (1+\xi)^2\,d\xi = \frac{8}{3}$

$\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)\,d\xi = \frac{4}{3}$

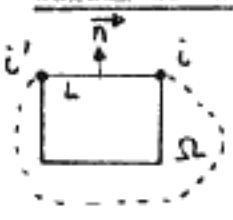
$\int_{-1}^{1} (1-\xi)^2\,d\xi = \frac{8}{3}$

donc :

$$K_{K,1} = \frac{1}{9}\,(4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)$$

et donc : $K_{K,i} = \frac{1}{9}\,(2\lambda_{k-1} + 4\lambda_k + 2\lambda_{k+1} + \lambda_{k+2})$, k modulo 4.

Calcul de $B^1_{L,i}$



$$B^1_{L,i} = \int_L \ell_i(x,y)\,n_x\,d\sigma = \int_L \ell_i(x,y)\,dy \text{ (curviligne)}$$

$$B_{L,i'} = \int_L \ell_{i'}(x,y)\,n_x\,d\sigma = \int_L \ell_{i'}(x,y)\,dy$$

$$y = (y_i(1+\xi) + y_{i'}(1-\xi))\frac{1}{2}$$

$$B^1_{L,i} = -\int_{-1}^{1} \frac{1+\xi}{2}\,\frac{y_i - y_{i'}}{2}\,d\xi \;,\quad B^1_{L,i'} = -\int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{2}\,\frac{y_i - y_{i'}}{2}\,d\xi$$

d'où :

$$B^1_{L,i} = B^1_{L,i'} = \frac{1}{2}\,(y_{i'} - y_i)$$

Calcul de $B^2_{L,i}$

$$B^2_{L,i} = \int_L \ell_i(x,y)\,n_y\,d\sigma$$

$$B^2_{L,i'} = \int_L \ell_{i'}(x,y)\,n_y\,d\sigma$$

de la même manière on obtient :

$$B^2_{L,i} = B^2_{L,i'} = \frac{1}{2}\,(x_i - x_{i'})$$

Calcul de R_L

$$R_L = \int_L d\sigma = \left[(x_i - x_{i'})^2 + (y_i - y_{i'})^2\right]^{1/2}$$

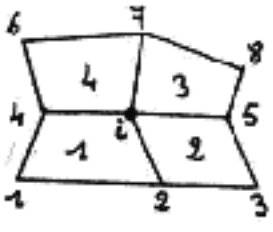
ANNEXE (2) - un condition de compatibilité des éléments

On veut montrer pour des maillages non rectangulaires, la condition de compatibilité II-3-1 entre les éléments :

si h_k élément de V_k
et h_k^c élément de V_k^c vérifient:

$$(3.1) \quad -\int_\Omega h_k \operatorname{div} \vec{\psi}_k \, dx + \int_\Gamma h_k^c \, \vec{\psi}_k . \vec{n} \, d\sigma = 0 \quad , \forall \varphi_k \in W_k$$

ALORS $h_k = 0$ dans Ω
$h_k^c = 0$ sur Γ



(fig. 1)

si i est un sommet de mailles intérieur au domaine, (3.1) s'écrit pour $\psi = (\ell_i, 0)$ ou $\psi = (0, \ell_i)$

$$\sum_{k=1}^{4} \int_k h_k \, \vec{\psi} . \vec{n} \, d\sigma = 0$$

En prenant les notations de la figure 1 et en notant $\vec{S_{ij}}$ le vecteur joignant le sommet i au sommet j on a :

$$(1) \quad |\vec{S_{24}}| \cos(\vec{S_{24}}, \vec{x_1}) h_1 + |\vec{S_{52}}| \, h_2 \cos(\vec{S_{52}}, \vec{x_1}) + |\vec{S_{7,5}}| \cos(\vec{S_{7,5}}, \vec{x_1}) h_3 + |\vec{S_{4,7}}| \, h_4 \cos(\vec{S_{4,7}}, \vec{x_1}) = 0$$

$$(2) \quad |\vec{S_{24}}| \sin(\vec{S_{4,2}}, \vec{x_1}) \, h_1 + |\vec{S_{52}}| \sin(\vec{S_{25}}, \vec{x_1}) \, h_2 + |\vec{S_{7,5}}| \sin(\vec{S_{5,7}}, \vec{x_1}) \, h_3 + |\vec{S_{7,4}}| \sin(\vec{S_{7,4}}, \vec{x_1}) \, h_4 = 0$$

Supposons que sur deux quadrilatères ayant un coté commun, h est nul. (par exemple $h_1 = h_2 = 0$), on va montrer qu'alors nécéssairement h est nul sur les deux autres.

Dans ce cas (1) et (2) deviennent:

$$(3) \quad h_3 |\vec{S_{7,5}}| \cos(\vec{S_{7,5}}, \vec{x_1}) + h_4 |\vec{S_{4,7}}| \cos(\vec{S_{4,7}}, \vec{x_1}) = 0$$

$$(4) \quad h_3 |\vec{S_{7,5}}| \sin(\vec{S_{5,7}}, \vec{x_1}) + h_4 |\vec{S_{7,4}}| \sin(\vec{S_{7,4}}, \vec{x_1}) = 0$$

, système dont le déterminant:

$\Delta = |\overrightarrow{S_{7,5}}||\overrightarrow{S_{7,4}}| \sin(\overrightarrow{S_{5,7}}, \overrightarrow{S_{7,4}})$ n'est nul que si $(\overrightarrow{S_{7,4}}, \overrightarrow{S_{7,5}}) = k\pi$, c'est à dire si les points 7,4 et 5 sont alignés. D'où la condition:

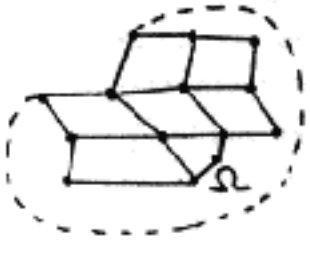
Condition 6

le maillage du domaine est tel que:
si K et K' sont deux mailles ayant un coté commun alors les diagonales de K et K' issues d'un même sommet ne sont pas alignées

Pour satisfaire la condition 3.1 il suffit donc de démontrer qu'il existe deux mailles adjacentes par un coté, dans lesquelles h est nul.
Pour le montrer il suffit de prendre deux mailles qui sont adjacentes au bord de Dirichlet. L'écriture de (3.1) en ces points permet de montrer que dans ces mailles h = o ce qui entraine h = o partout dans Ω

puis on écrit ensuite (3.1) pour les points se trouvant sur la frontière de type Neumann et on en déduit de proche en proche que $h^c = o$ sur Γ

Remarque. En fait la condition 6 elle-même n'est pas minimale.
Il suffit en fait de réaliser cette condition pour certaines mailles voisines de "coins rentrants" (voir fig.2)



(fig. 2)

-- BIBLIOGRAPHIE --

(1) J.L LIONS , E.MAGENES :
Problèmes aux limites non homogènes.
DUNOD . 1968

(2) R. TEMAM :
On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations.
Cours à l'université du Maryland. 2 édition JUIN 74.

(3) R.TEMAM :
Cours de C_3 d'analyse numérique .ORSAY.

(4) A.BENSOUSSAN, J.LIONS , R.TEMAM :
Méthodes numériques d'analyse de systèmes
Tome 2. Méthodes de décomposition.
IRIA. Cahier N°11.JUIN 72

(5) P.G CIARLET, P.A. RAVIART
General Lagrange and Hermite interpolation in with
applications to finite elements methods.
Arch.for Rat. Mech. (46, 1972)

(6) F.BREZZI
On the existence,uniqueness and approximation of saddle-point
problems arising from lagrangien multipliers.
R.A.I.R.O. aout 74.

(7) P.A.RAVIART, J.M THOMAS :
A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems.
Université PARIS VI

(8) B. SCHEURER :
Existence et approximation de point selles pour certains problèmes non linéaires.
R.A.I.R.O. 1978

(9) J. BEAR :
Dynamics of fluids in porous media.
Am. Elsevier, New-York 1972

(10) J.J. FRIED :
Groundwater pollution.
Elsevier, Amsterdam 1975

(11) G.F. PINDER :
A Galerkin finite element simulation of groundwater contamination on Long Island.
New-York ,Wat.Res.RES.9, N°6 1973

(12) B.CHASTAN ,J.M DARVES-BORNOZ,J.WOLSACK :
Résolution numérique du problème de transport miscible en nappe captive par une méthode d'éléments finis mixtes.
A paraitre dans : "compte-rendus des journées de l'hydraulique de la Société Hydrotechnique de France" (Sept. 78)

(13) K.O. FRIEDRICHS :
Symmetric positive differentiel équations .
Comm. on. pure and appl. math. (1958)

(14) P.LESAINT :
Sur la résolution des systèmes hyberboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis.
Thèse . 1976

(15) P.D LAX, R.S PHILLIPS :
Local boundary conditions for dissipative symmetric linear différentiel operators.
Comm.Pare.Appl.Math. 13,427-455 1960

(16) R.S. PHILLIPS, L.SARASON :
Singular symmetric positive first order differentiel operators .
Journal of mathematics and mechanics 15,235-271 1966

(17) P.LESAINT, P.A.RAVIART :
On a finite element method for solving the neutron transport equation.
Université PARIS VI et C.N.R.S.

(18) G.CHAVENT :
A new formulation of diphasic incompressible flows in porous media.
IRIA . Laboria

(19) M.ABRAMOVITZ , I.A STEGUN:
Handbook of mathematical functions
Dover publications, inc., New-York.